

FRACTALES EN LOS MERCADOS FINANCIEROS

TESINA MÁSTER MERCADOS FINANCIEROS 2008-2009

ANNA BATLLE JOHER

SANDRA GRÈBOL MONTORO

1. INTRODUCCIÓN: OBJETIVOS DEL ESTUDIO	3
1.1 Motivación del estudio	3
1.2 Planteamiento del problema (limitaciones)	3
1.3 Objetivo de estudio	4
2. ANTECEDENTES	5
2.1 Hipótesis mercados eficientes	5
2.2 Modelos tradicionales	7
2.2.1 Teoría de Carteras de Markowitz	7
2.2.2 Modelo de Mercado de Sharpe	8
2.2.3 Modelo CAPM	8
2.3 Fallos modelos tradicionales	10
3. INTRODUCCIÓN A LOS FRACTALES	13
3.1 Definición de fractal	13
3.2 Características de los fractales	13
3.2.1 Autosimilitud	13
3.2.2 Autoafinidad	14
3.2.3 Dimensión fractal	14
3.3 Tipos de fractales	15
3.3.1 Lineales	15
3.3.2 No lineales	16
3.4 Geometría fractal	16
3.5 Formación de objetos fractales	17
3.6 Análisis fractal	18
3.7 Aplicación fractales	19
3.7.1 Fractales en la naturaleza	19

3.7.2	Fractales en la ciencia_____	20
3.8	Fractales en finanzas_____	21
3.9	Teoría del caos_____	22
4.	ANÁLISIS FRACTAL_____	25
4.1	Análisis estadístico_____	25
4.1.1	Hipótesis del mercado fractal_____	25
4.1.2	Prueba normalidad_____	27
4.1.3	Prueba de distribución de Pareto-Levy (colas pesadas)____	28
4.1.4	Prueba invarianza a escala_____	29
4.2	Análisis fractal series temporales_____	30
4.2.1	Exponente de Hurst_____	30
4.2.2	Técnica y estimación del exponente de Hurst y análisis R/S_	30
4.2.3	Interpretación del exponente de Hurst_____	32
4.2.4	Cálculo de la dimensión fractal_____	33
5.	APLICACIÓN MÉTODO FRACTAL A LOS ÍNDICES BURSÁTILES_____	35
5.1	S&P_____	36
5.2	Dow Jones_____	39
5.3	VIX_____	42
5.4	GBPUSD_____	45
5.5	JPYUSD_____	49
6.	Conclusiones_____	52
7.	Reflexiones_____	54
8.	Bibliografía_____	55

1. INTRODUCCIÓN: OBJETIVOS DEL ESTUDIO

1.1 MOTIVACIÓN DEL ESTUDIO

La economía financiera se ha estudiado bajo paradigmas lineales. Es decir, la visión de que para cada acción hay una reacción proporcional. Pero vemos que en la realidad no se dan estas reacciones tan proporcionales. Entonces nos encontramos en situaciones de no-linealidad, pero esto complica el análisis académico y las predicciones. Es por eso que muchos académicos y estudios simplifican el estudio de la realidad bajo conceptos lineales, ya que asumen que las restricciones lineales no afectan a la utilidad de predicción de sus modelos, aunque el sistema sea no lineal.

Los modelos lineales son más fáciles de trabajar que los no lineales, y por esto son los más utilizados y los que se enseñan a nivel académico, ya que los beneficios de la simplificación del modelo lineal compensan más que las propias limitaciones del modelo asumiendo hipótesis de linealidad y normalidad.

El propósito de esta tesina es hacer una comparativa entre los modelos económico-financieros tradicionales y académicos con otros modelos no lineales. Un día, escuchamos hablar sobre la teoría del caos y la teoría fractal, y nos captó nuestra atención y quisimos saber más. Empezamos a leer muchos artículos y estudios sobre este tema, y vimos que estas teorías se basaban en la observación de la realidad y tienen aplicaciones en varias disciplinas. Nos pareció un tema interesante a ver, dado que estas teorías no suelen enseñarse en los programas estándar de economía.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA (LIMITACIONES)

Los modelos económicos se basan en supuestos e hipótesis que cuando se utilizan como predicción, sus resultados pueden tener "cierto grado de ajuste a la realidad" pero que no son muy fiables. Las previsiones realizadas con modelos tradicionales, cuando han sido acertadas, han sido relevantes en periodos cortos de tiempo.

En la realidad, un pequeño cambio en una variable parece tener un impacto superior al que hubiera predicho la teoría.

Otra evidencia es que el mercado de capitales no se comporta como lo que predeciría la teoría del paseo aleatorio. El mercado de valores tiene situaciones extremas ("outliers") y con una duración en el tiempo más largo que los que se puede atribuir como ruido. Es decir, que los valores más extremos se dan con mayor probabilidad que lo que estiman los modelos tradicionales. Aquí tenemos un indicio de que los modelos que presuponen una distribución de normalidad, no se ajusta a la realidad.

La econometría se supone que es la herramienta para predecir el futuro económico.

- Equilibrio. Los mercados tienen equilibrio debido a que los horizontes temporales de los inversores son a distinto plazo. Este hecho asegura liquidez en los traders. Si en algún momento los inversores largo placistas redujeran su horizonte temporal o dejarán de participar en el mercado, este se volvería inestable. La econometría presupone que todos los inversores tienen el mismo horizonte temporal.
- Tratamiento del tiempo. La visión econométrica ignora el tiempo, o en el mejor de los casos lo trata como una variable más. Los mercados y la economía no tienen memoria o muy limitada. La econometría no tiene en cuenta que un cambio en una variable puede cambiar la predicción.
- Otro aspecto cualitativo que no se toma mucho en cuenta pero sí relevante es la toma de decisiones de los humanos. Estamos influenciados por el pasado. Nuestras expectativas sobre el futuro vienen marcadas por nuestras experiencias recientes. De esta manera el pasado influye el presente, y el presente el futuro. Este aspecto es ignorado por la gran mayoría.

1.3 OBJETIVOS DEL ESTUDIO

Nuestro estudio tiene dos objetivos distintos. Por un lado demostrar que los mercados financieros no se ajustan a un movimiento browniano aleatorio, tal y como presuponen los modelos tradicionales, sino que posee un movimiento browniano fraccionario, y como tal, un mejor ajuste para estudiar los precios es mediante un enfoque de la geometría fractal. Con datos empíricos de distintos activos (índices, divisas, e índice de volatilidad), demostraremos que dichos activos tienen un comportamiento fractal. Otra de las razones de nuestro estudio, es conocer otro enfoque distinto, no visto en clase, de cómo se pueden ajustar los precios, y divulgarlo a nuestros compañeros. Así como también divulgar que es un fractal, las propiedades de estos y aparte de las aplicaciones que pueda tener en el ámbito de los mercados financieros, las distintas aplicaciones en los otros campos.

2. ANTECEDENTES

En este capítulo se hará una breve descripción de los modelos vigentes de teoría de carteras. No es el objeto de nuestro estudio profundizar en estas teorías, ya conocidas por todos, sino fijarnos en los pilares que se fundamentan estos modelos y con los supuestos e hipótesis de los que parten. Una vez descritos los supuestos nos servirá para poder en la parte final rebatir dichas premisas.

2.1 HIPÓTESIS DEL MERCADO EFICIENTE

Según esta hipótesis un mercado eficiente es aquel donde los precios de los títulos negociados en los mercados financieros reflejan toda la información disponible y se ajustan total y rápidamente a la nueva información. Cuando un mercado es eficiente los cambios en los precios de los valores son imprevisibles y por ello se comportan como un paseo aleatorio.

Esta hipótesis tiene las siguientes implicaciones:

- 1) Los mercados no tienen memoria, en el sentido de que no "recuerda" lo que ocurrió anteriormente y, por lo tanto, la variación que se pueda producir hoy en los precios no tiene nada que ver con la de ayer.
- 2) Todos los inversores tienen la misma información, por lo tanto todos los inversores tienen las mismas probabilidades de ganar o perder (la mayor rentabilidad que algunos inversores puedan obtener sobre el resto, será producto del azar).
- 3) Los activos financieros entran en competencia entre sí, puesto que es la única manera de que toda la información que afecte al valor intrínseco de los títulos se refleje inmediatamente en sus precios.
- 4) Todos los títulos están perfectamente valorados, los inversores obtendrán un rendimiento sobre su inversión que será el apropiado para el nivel de riesgo asumido, sin importar cuáles sean los títulos adquiridos. Esto implica que si el mercado es eficiente, el tiempo, el dinero y el esfuerzo gastados en el análisis del valor intrínseco de los títulos será inútil.

Harry Roberts (1967), definió tres niveles de eficiencia de los mercados de valores, donde cada nivel tiene implicaciones distintas para el funcionamiento de los mercados.

- **Hipótesis débil**

En la hipótesis débil se supone que cada título refleja totalmente la información contenida en la serie histórica de precios, es decir, toda la información pasada. Por lo tanto, no pueden obtener rentabilidades superiores analizando dichas series, es decir utilizando el análisis técnico

- **Hipótesis semifuerte**

Según esta hipótesis un mercado es eficiente en su nivel semifuerte cuando los precios reflejan, no sólo toda la información pasada, sino también toda la información hecha pública acerca de la empresa o de su entorno, que pueda afectar a cada título en particular (informe de resultados, anuncios de dividendos, balances anuales, trimestrales, variación del tipo de interés, etc.). La hipótesis semifuerte implica que las técnicas del análisis fundamental no serán capaces de lograr rendimientos superiores a los del mercado.

- **Hipótesis fuerte**

La hipótesis fuerte parte del supuesto de que los precios reflejan absolutamente toda la información ya sea pasada, pública o privada. Según ella, ningún inversor podrá "batir al mercado" como no sea por azar. Esta es una hipótesis extrema que es prácticamente imposible de cumplir en ningún mercado, pues ello implicaría que dicho mercado sería perfecto y eso es una quimera. Según este nivel la mejor forma de sacar provecho del mercado es mediante una gestión pasiva.

La hipótesis débil está incluida en la hipótesis semifuerte y ésta a su vez está incluida en la hipótesis fuerte.

2.2 MODELOS TRADICIONALES

2.2.1 Teoría de carteras Markowitz

El origen de los conceptos de la teoría moderna de carteras data de un artículo escrito en el año 1952 por Harry M. Markowitz.

Markowitz desarrolló su modelo sobre la base del comportamiento racional del inversor. Es decir, el inversor desea la rentabilidad y rechaza el riesgo. Matemáticamente riesgo y rendimiento se traducen en conceptos como rendimientos esperados y medidas de dispersión en la distribución de los mismos, así como la covarianza entre los rendimientos esperados de dos títulos. A partir de estos elementos, Markowitz señaló como se pueden combinar de forma eficaz (en términos de riesgo y rendimiento) y finalmente generó un conjunto de carteras eficientes entre las cuales se encuentra la cartera óptima, aquella que maximiza el binomio rentabilidad-riesgo.

La teoría de Markowitz se basa en las siguientes premisas:

1. La rentabilidad de cualquier título o cartera, es una variable aleatoria de carácter subjetivo, cuya distribución de probabilidad para el periodo de referencia es conocido por el inversor.
2. La media de esa distribución representa su rentabilidad esperada.
3. Su varianza o desviación estándar representa el riesgo de la acción o de la cartera.
4. La conducta del inversor le lleva a preferir aquellas carteras con una mayor rentabilidad y menor riesgo.
5. Una cartera es eficiente cuando ofrece la mayor rentabilidad para un mismo nivel de riesgo.
6. Es óptima para cada inversor la cartera que se encuentra en el punto de tangencia entre el conjunto de carteras eficientes.

Para poder integrar una cartera de inversión equilibrada lo más importante es la diversificación ya que de esta forma se reduce la variación de los precios.

En el modelo de Markowitz, el número de parámetros que se deben calcular aumenta rápidamente a medida que crece el número de activos de una cartera. Su discípulo Sharpe, establece un nuevo modelo, modelo de Mercado de Sharpe, que soluciona el problema de la complejidad de los cálculos numéricos de Markowitz.

2.2.2 Modelo de Mercado de Sharpe

Ideado por W. F. Sharpe (1963) para simplificar el modelo de cartera de Markowitz (1952 y 1959), facilitando así el cálculo de Σ (matriz de varianzas y covarianzas entre las rentabilidades de los diferentes títulos que operan en el mercado). Este modelo se utiliza para estimar la rentabilidad y el riesgo de los valores mobiliarios o activos financieros. Según este modelo, el rendimiento de un activo financiero es una función lineal del rendimiento de la cartera de mercado (estimado por el rendimiento del índice).

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{mt} + \epsilon_{it}$$

El término independiente de esa relación o recta de regresión (coeficiente alfa) expresa la parte del rendimiento del correspondiente activo financiero que es independiente de las fluctuaciones del mercado, mientras que el coeficiente de la variable independiente o explicativa (rendimiento del mercado), el denominado coeficiente beta o coeficiente de volatilidad, mide el grado de vinculación o dependencia del rendimiento de ese activo con el rendimiento del mercado. Para desarrollar este modelo Sharpe se basó en las siguientes hipótesis:

- Las rentabilidades de dos activos son independientes entre sí ya que dichas rentabilidades únicamente dependen de las características de la empresa y de la sensibilidad del mercado.
- El inversor invierte todo el dinero disponible para la creación de la cartera.
- No se puede invertir una cantidad negativa en un activo.

2.2.3 Modelo CAPM

El modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) fue desarrollado por varios autores independientemente, William Sharpe, John Lintner y Jack Treynor, a partir de las propuestas de Markowitz sobre la diversificación. Este modelo determina la relación existente entre el precio de un activo y el riesgo asumido por dicho activo, a partir de elementos como tasas libres de riesgo, primas por riesgo del mercado y el coeficiente de regresión que asocia los rendimientos del activo con los del mercado. Es un modelo frecuentemente utilizado en la economía financiera, utilizado para determinar la tasa de retorno teóricamente requerida para un cierto activo. Hasta la fecha, se han hecho a numerosas modificaciones y adiciones para adecuar el modelo a diversas condiciones y propósitos. Sin embargo, es claro que representa una visión idealizada

del mecanismo bajo el cual se forman los precios de los valores y se determinan los rendimientos esperados por parte del mercado.

El modelo asume varios aspectos sobre los inversores y los mercados:

1. Los inversores buscan maximizar la utilidad esperada de la riqueza terminal en un solo periodo, y eligen entre carteras alternativas con base en el rendimiento esperado y desviación estándar de cada una de ellas.
2. Los inversores pueden prestar o pedir prestadas sumas ilimitadas a la tasa libre de riesgo dada, sin restricciones sobre ventas en corto de cualquier activo.
3. Los inversores tienen estimaciones idénticas de los valores esperados, varianzas y covarianzas de los rendimientos entre todos los activos, es decir, tienen expectativas homogéneas
4. Todos los inversores tienen el mismo horizonte temporal de inversión.
5. Los inversores invierten toda su riqueza. Esto hace que ningún inversor tenga el dinero suficiente para poder incidir en el precio y, como consecuencia, el precio de cada activo es el precio de equilibrio.
6. Todos los activos son perfectamente divisibles y perfectamente líquidos.
7. En los mercados solo existen dos tipos de activos: los activos arriesgados y un activo libre de riesgo.
8. Los mercados son perfectos, es decir, no hay costes de transacción, ni impuestos
9. Los mercados son competitivos.
10. las cantidades de todos los activos son fijas y están dadas, y los activos son perfectamente divisibles.

Las principales limitaciones de este modelo se encuentran en sus mismos supuestos originales.

- El modelo no explica adecuadamente la variación en las rentabilidades de los títulos valores. Estudios empíricos muestran que activos con bajos betas pueden ofrecer retornos más altos de los que el modelo sugiere.
- El modelo asume que, dada una cierta tasa de rentabilidad esperada, los inversores prefieren el menor riesgo, y dado un cierto nivel de riesgo, preferirán los mayores retornos asociados a ese riesgo. No contempla que hay algunos inversores que están dispuestos a aceptar menores rentabilidades por mayores riesgos, es decir, inversores que pagan por asumir riesgo.

- El modelo asume que todos los inversores tienen acceso a la misma información, y se ponen de acuerdo sobre el riesgo y la rentabilidad esperada para todos los activos.
- La cartera del mercado consiste de todos los activos en todos los mercados, donde cada activo es ponderado por su capitalización de mercado. Esto asume que los inversores no tienen preferencias entre mercados y activos, y que escogen activos solamente en función de su perfil de riesgo-rentabilidad.

2.3 **FALLOS EN LOS MODELOS TRADICIONALES**

Los modelos tradicionales de mercados financieros no sólo nos presentan un visión simplificada de su funcionamiento (cómo hacen todos los modelos), sino que también nos presentan un modelo basado en supuestos que no sólo no tienen fundamento empírico, sino que estos modelos tampoco han sido capaces de explicar los movimientos de los mercados financieros (particularmente en lo que respecta a movimientos bruscos que ocurren con una frecuencia muchas veces superior a lo predicho por modelos tradicionales), realizar buenas predicciones ni detallar los factores que impulsan los movimientos del mercado o la manera en que estos se producen.

En este apartado, analizaremos las principales asunciones de las que parten dichos modelos, y las compararemos con la realidad de los mercados.

- **1ª Asunción**: La gente es racional y su único objetivo es enriquecerse. Cuando escojan la cartera harán una elección racional, que permita obtener la máxima riqueza y bienestar posible. Harán que el mercado funcione eficientemente y sus acciones bien razonadas llevarán con rapidez los precios al nivel "correcto".
 - ***En realidad***, la gente no siempre actúa de forma racionalmente y en su propio interés. El hombre real es irracional, cuando compra y vende activos sus emociones influyen en sus decisiones, motivo por el cual impide que tenga un comportamiento racional, y en consecuencia hace que el mercado no constituya un modelo racional.
- **2ª Asunción**: Todos los inversores son iguales. Los inversores tienen los mismos objetivos y el mismo horizonte temporal. Por tanto dada la misma información, tomarán las mismas decisiones. En resumen, los inversores tienen expectativas homogéneas.

- **En realidad**, sin tener en cuenta las diferencias de patrimonio, es obvio que no todos los inversores son iguales. Hay quienes compran acciones a largo plazo, o quienes su objetivo es hacer trading, por tanto ni tienen el mismo horizonte temporal ni los mismos objetivos.
- **3ª Asunción:** El cambio de precios es prácticamente continuo. Las cotizaciones de las acciones, divisas, no saltan o caen varios puntos de golpe, sino que cambian de forma paulatina.
 - **En realidad**, que los precios saltan es una afirmación trivial, pues los bróker suelen redondearlos, lo que elimina los valores intermedios. Así pues cuándo haya mucha presión vendedora, es normal que los precios salten varios ticks, sin que se cruce ninguna orden. La discontinuidad es un ingrediente esencial de los mercados financieros.
- **4ª Asunción:** Los cambios de precios siguen un movimiento browniano, aleatorio. Dentro del movimiento browniano subyacen tres conceptos.
 1. Independencia estadística de los precios. Cada nuevo precio, es independiente del anterior, de forma que los precios de ayer no influyen en el precio de hoy, al igual que el precio de hoy no influirá en el precio del mañana.
 2. Estacionariedad estadística. El proceso que genera los cambios de precio, sea cual sea es invariante. Se trata de un paseo aleatorio, al igual que lanzar una moneda en el aire, esta no se altera en medio del juego, lo único que cambia es el número de caras o cruces.
 3. Normalidad en los precios, los cambios de precio se ajustan a una distribución normal definida por una campana de Gauss, los cambios grandes son escasos, con una frecuencia muy pequeña.
 - **En realidad**, los precios no son independientes, sino que tienen memoria, lo que pasa en los mercados hoy, afecta al precio de mañana. En los siguientes capítulos hemos realizado un estudio del grado de dependencia de los precios, mediante el exponente de hurst. También sabemos que los cambios de precio no son invariantes, un rumor, una mala noticia puede afectar de forma muy incisiva en el precio. Y por último, veremos que los cambios de precios no siguen una distribución normal, sino el contrario presentan distribuciones leptocúrticas y con colas gruesas.

Para poder realizar los análisis estadísticos usuales, es necesario que los activos sean independientes e idénticamente distribuidos, más aún, normalmente distribuidos. Sin

embargo, rara vez encontraremos distribuciones normales en los mercados financieros. Tampoco podemos asegurar que sean independientes puesto que no toda la información disponible hoy es incorporada a los precios de los activos. No sólo nos encontramos con información asimétrica, sino también podemos ver que la información de hoy tiene efectos claros en el futuro, y no es simplemente descontada en un período y "olvidada" en los períodos siguientes, cómo nos harían creer estos modelos basados en los movimientos brownianos "puros".

En los próximos apartados nos dedicaremos a desmentir, este último trío de asunciones, demostrando con números y series de precios, que los mercados financieros no cumplen con un movimiento browniano aleatorio, sino que siguen un movimiento browniano fraccionario.

3. INTRODUCCION A LOS FRACTALES

En este capítulo vamos a describir qué son los fractales y sus características más importantes. Veremos sus aplicaciones en los distintos ámbitos de estudio, y en concreto en los mercados financieros.

3.1 DEFINICIÓN DE FRACTAL

El término fractal proviene del latín "fractus" que significa "fragmentado" o "fracturado". Se aplica al conjunto de formas generadas normalmente por un proceso de iteración, se caracterizan por poseer similitud en toda escala, por no ser diferenciables y por mostrar dimensión fraccional. En palabras de L. Kadanoff: "un fractal contiene copias de sí mismo, dentro de sí mismo".

Un fractal es una estructura que está compuesta por pequeñas partes, las cuales son parecidas a la figura original, que se repiten en diferentes escalas, desde grandes (macro) hasta pequeñas (micro).

3.2 Propiedades de los fractales

3.2.1 Auto-similitud

La transformación de similitud o escalamiento consiste en generar una copia similar de un objeto cualquiera en una escala diferente. Para conseguirlo vamos a utilizar el *factor de escalamiento* (proporcionalidad). De este modo, dos objetos son similares si poseen la misma geometría, aunque tengan diferente tamaño.

Los fractales auto-similares son estructuras que permanecen invariantes a los cambios de escala, son ***isontrópicos*** (tienen las mismas propiedades en todas las direcciones), permanecen invariantes cuando cambia la escala uniformemente en todas las direcciones.

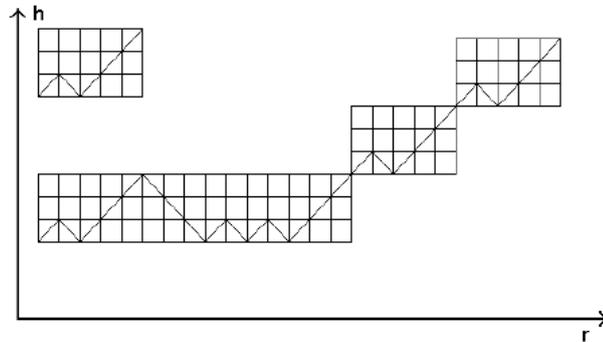
Son como un zoom de alta calidad que lo expande o comprime todo de manera uniforme; lo que se ve a una distancia focal será similar a lo que se ve a otra.

Un objeto fractal cada vez que cambiamos la escala, revela un claro parecido con la imagen anterior. Por lo tanto, podemos definir el auto-similitud como simetría dentro de una escala, es decir, los fractales son recurrentes.

3.2.2 Autoafinidad

Un objeto fractal se dice que es auto-afín cuando permanece invariante bajo la escala de transformación **anisotrópica** (diferentes escalas en todas las direcciones). A pesar de sus diferencias, en una escala de transformación, las direcciones no son completamente independientes.

Si al hacer un *zoom*, uno de los ejes de coordenadas se transforma en un factor b , $x \rightarrow bx$, el resto de los ejes coordenados deben ser reescalados en un factor b^{a_i} , $x_i \rightarrow b^{a_i}x_i$, con el objeto de preservar el conjunto invariante.



Los modelos que representan un sistema fractal tienen auto-similitud a un nivel macro y a un nivel micro. Es decir, procesos matemáticos de creación de estructuras fractales son iteraciones de reglas simples de objetos iniciales. Pequeños cambios crean enorme variedad de patrones tanto a nivel micro como a nivel macro.

3.2.3 Dimensión fractal

La noción de dimensión fractal (fraccional) proviene de una manera de cuantificar cuán rugosa es una curva. Normalmente consideramos que los puntos tienen dimensión 0, las líneas 1, las superficies 2 y los volúmenes 3. A esta idea de dimensión se le llama dimensión topológica o euclidiana. Sin embargo, una curva rugosa que recorre una superficie puede ser tan rugosa que casi llene la superficie en la que se encuentra. Superficies como el follaje de un árbol o el interior de un pulmón pueden efectivamente ser tridimensionales. Podemos, entonces, pensar en la rugosidad como un incremento en la dimensión: una curva rugosa tiene una dimensión entre 1 y 2, y una superficie rugosa la tiene entre 2 y 3.

Así, cuantificar fractales será definir, por algún procedimiento, la proporción del espacio físico que es llenado por ellos. A modo de ejemplo, si tenemos una hoja de papel, es un objeto tridimensional pues posee un cierto grueso, supongamos que no fuera así y fuera totalmente plana, es decir que fuera un plano (una dimensión euclidiana de dos). En ese caso, si la arrugamos formando una bola, el objeto tendría volumen y sería sólido, pero no sería tridimensional porque la bola estaría llena de huecos y discontinuidades. La dimensión fractal de esta bola sería un número no

entero que estaría comprendido entre 2 y 3 ya que no ocuparía el 100% del espacio de nueva figura.

Para calcular la dimensión de un fractal se usan los conceptos de límite, logaritmo, escalas y medidas. En el cálculo de la dimensión de fractales muy complejos como el conjunto Mandelbrot se usan computadoras, pero para fractales más simples se usan fórmulas matemáticas, una muy común es la de Hausdorff-Besicovitch.

$$S = LD$$

Donde S es la cantidad de segmentos o su longitud L es la escala de medición D es justamente la Dimensión.

$$\text{Log } S = \text{Log } LD$$

Por propiedades de los logaritmos se puede decir que:

$$\text{Log } S = D * \text{Log } L$$

Dividimos ambos miembros por Log L y obtengo:

$$D = \text{Log } S / \text{Log } L$$

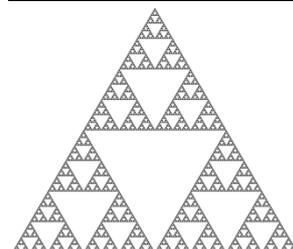
Existen varios métodos para calcular la dimensión fractal, tales como el exponente de Hurst, que utilizaremos en nuestra tesina y que analizaremos con más detalle en el siguiente capítulo.

3.3 TIPOS DE FRACTALES

Existen dos tipos bien definidos de fractales. Los **LINEALES** y los **NO LINEALES**. Intuitivamente se los puede reconocer sin problema.

3.3.1 Fractales lineales

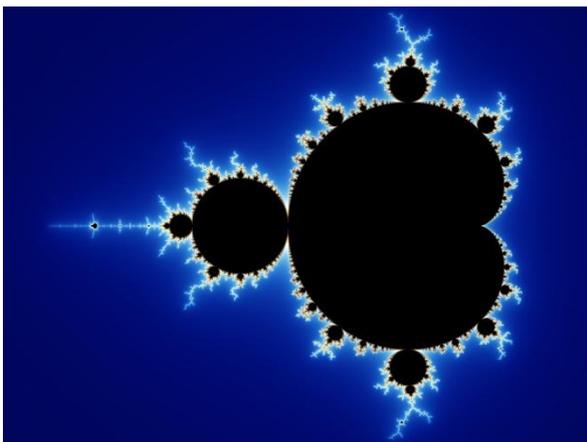
Los **fractales lineales** son aquellos que se construyen con un simple cambio en la variación de sus escalas. Esto implica algo muy importante, los fractales lineales son exactamente **idénticos** en todas sus escalas hasta el infinito.



En cualquiera de las imágenes anteriores cuando uno comienza a “sumergirse” dentro de esos objetos siempre va a encontrar exactamente la misma estructura, sin distorsiones, solo cambiará su escala. Lo vemos claramente en la imagen anexa correspondiente al copo de nieve de Koch.

3.3.2 Fractales no lineales

Los fractales **no lineales**, en cambio, son aquellos que se generan a partir de distorsiones complejas o justamente como lo dice su nombre, y usando un término proveniente de la matemática Caótica, distorsiones no lineales. La mayoría de los objetos fractales puramente matemáticos y naturales son no lineales. Ejemplos de ellos son: el súper conocido por todos nosotros Conjunto de Mandelbrot o el Conjunto de Julia.



3.4 GEOMETRÍA FRACTAL

La geometría fractal puede dar respuesta a fenómenos irregulares tales como la forma de las nubes, las siluetas de las montañas y el perímetro de las costas, cuestión que no puede resolver la geometría euclidiana que sólo puede representar el orden a través de figuras basadas en cuerpos regulares (rectas, planos...).

La geometría fractal consiste en identificar patrones repetitivos, analizarlos, cuantificarlos y manipularlos; es una herramienta a la vez analítica y sintética. El patrón puede tomar muchas formas. Puede ser una forma concreta que se repite a escalas sucesivamente menores (por ejemplo en el caso de un helecho o la coliflor); puede ser una pauta estadística abstracta, como la probabilidad de que un cuadrado particular de una trama sea blanco o negro. La pauta puede aumentar o disminuir de

escala, comprimirse o retorcerse, o ambas cosas. La manera en que ésta se repite puede estar estrictamente definida por una regla determinista precisa.

La construcción de los fractales más simple parte de un objeto geométrico clásico: un triángulo, una línea recta, una bola sólida. A esto se le llama **iniciador**. Luego viene el **generador**, la plantilla de la que se obtendrá el fractal. Suele ser un motivo geométrico simple: una línea quebrada, una curva rizada, una secuencia de precios... A continuación viene el proceso de construcción del fractal, lo que se denomina **regla de recursión**.

La geometría fractal permite analizar tres puntos principales:

- 1) Provee dimensiones adicionales y más cercanas a la realidad en comparación con la geometría euclidiana.
- 2) La mayoría de los sistemas complejos son caóticos, y éstos exhiben conductas extrañas asociados con límites o campos que no pueden ser representados en dimensiones enteras.
- 3) Los fractales son escalables, es decir, se puede reducir o ampliar su análisis para observar detalles, mientras que las formas básicas se conservan en cada escala.

3.5 FORMACIÓN DE OBJETOS FRACTALES

Los procesos matemáticos que crean las estructuras fractales son iteraciones de reglas simples de objetos iniciales. Un ejemplo clásico sobre una figura fractal es la construcción del **Triángulo de Sierpinski**.



La figura se obtiene conectando los puntos medios de los tres lados de un triángulo equilátero y seleccionando sólo los tres subtriángulos que se forman en las esquinas, suprimiendo la cuarta parte central del triángulo. Repitiendo este proceso de construcción, quitando fragmentos cada vez más pequeños una y otra vez, infinitas veces, se genera una imagen fractal.

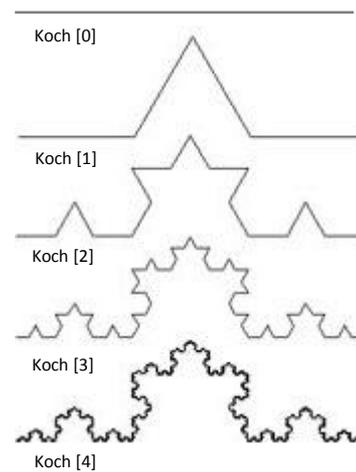
Otros ejemplos matemáticos son la **Curva de Koch** donde se parte de un segmento línea recta con longitud ($L=1$). El segmento inicial se divide en tres partes iguales, la

parte central se sustituye por dos segmentos de la misma medida formando un triángulo equilátero con el segmento que hemos suprimido.

Cada uno de los segmentos obtenidos mide $L/3$, así pues la longitud de la curva obtenida es $4*(L/3)=4L/3$

Cada uno de los segmentos obtenidos de la iteración anterior se vuelve a dividir en tres partes iguales y se procede de la misma manera: la parte central de cada segmento obtenido se sustituye por dos segmentos de la misma medida formando un triángulo equilátero con el segmento que hemos suprimido.

En la iteración Koch [2] cada uno de los segmentos obtenidos mide $(L/3)/3=L/9$, y como obtenemos 16 segmentos nuevos la longitud total será $16*(L/9)=(4/3)^2*L$



Se aplica la iteración de nuevo a cada segmento obtenido al dividirlo en tres partes iguales.

Podemos deducir entonces que la longitud de la curva después de n-iteraciones va a ser: $(4/3)^n*L$. De aquí deducimos que la longitud de la curva Koch es infinita, a medida que crece el número de iteraciones, por tanto, la longitud aumenta indefinidamente, como se comentó anteriormente.

3.6 ANÁLISIS FRACTAL

El análisis fractal permite determinar la dimensión fraccional y detectar las propiedades de auto-similitud y auto-afinidad en los objetos sujetos de investigación con características complejas; caracteriza modelos de la naturaleza que no puede cuantificarse eficazmente con geometría clásica de dimensiones que son números enteros. Hay varias técnicas para determinar la dimensión fractal.

Las técnicas basadas en el "análisis fractal" sugieren que el dato del mercado exhibe *correlación temporal* (es decir, las fluctuaciones volátiles tienden a ocurrir con una

determinada tendencia) con distribuciones de probabilidad con cola ancha (los eventos extremos podrían ocurrir con mayor frecuencia que la descrita por una distribución normal). Por tal motivo, las técnicas tradicionales basadas en los modelos lineales no reflejan correctamente la volatilidad. Mandelbrot descubrió este comportamiento usando los precios diarios de algodón en 1963.

El análisis fractal proporciona valores numéricos que representan indicadores de aspereza. El concepto fractal, íntimamente ligado al de invariancia de escala, es utilizado para identificar orden en muchos problemas de características no lineales.

Sin la ayuda de los fractales, los sistemas complejos no pueden ser diseñados en gran detalle. Variaciones pequeñas o fluctuaciones pueden ser amplificadas mediante procesos iterativos y crean los cambios cualitativos en el nivel macro.

3.7 APLICACIONES DE LOS FRACTALES

Durante los primeros años de su existencia, los fractales eran meras curiosidades matemáticas, sin ninguna utilidad, pero con el paso del tiempo se han encontrado múltiples aplicaciones de la geometría fractal en campos muy diversos como pueden ser la biología, la geografía, la medicina, psicología, informática, finanzas, música, arte, etc.... No nos extenderemos mucho explicando de forma detallada las numerosas aplicaciones, ya que podría ser interminable y este no es el objetivo de nuestra tesina, pero sí que daremos una pincelada a las más importantes, y obviamente a las aplicaciones que tiene en Finanzas ya que esta es el área en estudio.

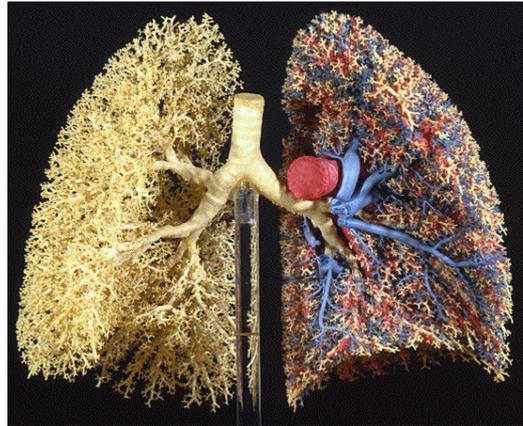
3.7.1 Fractales en la Naturaleza

Encontrar fractales en la naturaleza es muy sencillo de hecho vivimos rodeados de objetos que poseen geometría fractal, las nubes, las costas, montañas, las ramificaciones de los árboles. O, simplemente, dentro de nuestro propio cuerpo humano, como puede ser el sistema circulatorio, o las ramificaciones de los bronquios en los pulmones, o las redes neuronales.



Todos estos objetos se caracterizan por tener una invariancia a escala y auto-similitud, es

decir su estructura se va repitiendo a escalas más pequeñas. La estructura fractal es el mecanismo más efectivo para el crecimiento de los árboles y las plantas, ya que permite crear frondosidad. Los arboles y las plantas necesitan para crecer el agua de la lluvia, la luz del sol y el oxígeno del aire, y su estructura fractal es ideal para aprovechar el máximo el contacto con el exterior.



3.7.2 Fractales en la Ciencia

Tal y como hemos mencionado antes, la geometría fractal tiene numerosos alcances y aplicaciones en los distintos campos de la ciencia.

a) Uso en Geometría

Las líneas costeras, montañas y relieves poseen geometría fractal. Una de las aplicaciones de los fractales en la geografía es para calcular la distancia entre dos puntos. También permite elaborar mapas en 3 dimensiones más detallados, con más precisión y con una imagen que se asemeja hasta un 99,9% a la realidad.

También se puede predecir fenómenos geográficos, Benoît Mandelbrot, padre de la geometría fractal, predijo las crecidas del Río Nilo.

b) Uso en Biología

Los fractales han tenido gran repercusión en este campo. El sistema de venas y arterias se rige por una geometría fractal. Por otro lado se cree adivinar cierta similitud entre los fractales y el código genético. Otra utilización de los fractales en las ciencias naturales es para estudiar las relaciones alométricas, es decir cómo se escalan unas cantidades respecto a las otras, a modo de ejemplo el metabolismo de los animales, el consumo de energía de los animales, o la fuerza de los animales en función de su peso, ambos no cumple una relación lineal, sino que aumentan a un ritmo menor.

c) Uso en la música

La utilización de procedimientos fractales para la composición de música, dónde a cada punto del fractal se le asocia una nota, creando de este modo música fractal.

d) Informática

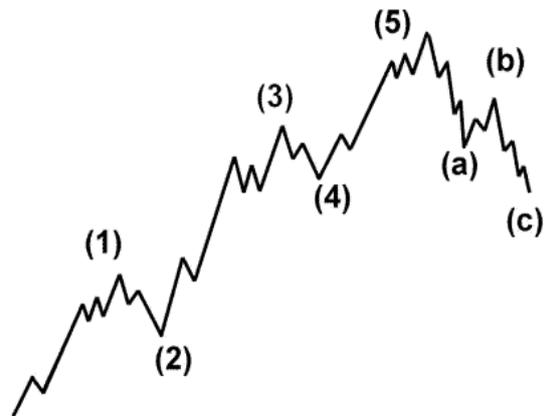
Permite el desarrollo de muchas técnicas distintas. Pero la aplicación más común es la *transformación fractal*, proceso inverso a la construcción de un fractal, en lugar de crear la imagen partir de un conjunto de ecuaciones, se busca el conjunto de ecuaciones que describen aproximadamente la imagen. Este proceso se basa en tomar una imagen y expresarla como un Sistema de Funciones Iteradas (SFI), que es un conjunto de funciones que describen partes de un fractal y que al unirlas recrean dicho fractal. La imagen puede mostrarse rápidamente y un zoom proporciona infinitos detalles. Es de gran utilidad para comprimir imágenes y videos de forma que ocupen menos peso (bytes) y puedan ser transmitidos por la red más rápidamente y a menor coste.

3.8 Fractales en Finanzas

El análisis técnico es el estudio de los movimientos del mercado, básicamente a través de gráficos "charts".

En los años 30 Ralph Nelson Elliot (1871- 1948) desarrolló su teoría, basada en la observación de los movimientos de precios.

Los movimientos tendenciales del mercado y sus posibles cambios, seguían unas pautas de comportamiento identificable y repetitivo en forma de patrones. Según Elliot la estructura completa está formada por cinco ondas en el sentido de la tendencia principal y tres ondas en una fase correctiva posterior. Esta estructura está



provocada por el comportamiento psicológico humano (el miedo a la pérdida y la ambición a ganar). Sin proponérselo, y ni tan sólo conocer el concepto, Elliot descubrió la naturaleza fractal de los gráficos de precios.

Las formaciones de esos gráficos tienen estructura fractal. Ya que cumplen las siguientes propiedades:

- Son auto-similares, es decir si miramos un gráfico de precios, sin escalas en los ejes, no sabremos distinguir si la serie de precios es diaria, mensual, anual, etc....
- Muestran elevada sensibilidad a las condiciones iniciales, ya que a partir de condiciones similares muestran un comportamiento totalmente distinto.
- Tienen dimensión fractal, su dimensión es no entera, superior a 1 e inferior a 2.

Estas características de los fractales, con las que coinciden los precios de los activos, contradicen los supuestos de comportamiento normal e independencia de los rendimientos bursátiles contenidos en la hipótesis del mercado eficiente y han dado lugar a la utilización de una medida como el "coeficiente de Hurst" para determinar la correlación entre precios sucesivos, y que está relacionado con la dimensión fractal. En los siguientes capítulos profundizaremos sobre este tema, y calcularemos el coeficiente de Hurst para distintos índices bursátiles y otros activos.

3.9 Teoría del Caos

Los sistemas lineales, representan el orden, son predecibles y cómodos de manejar, de ahí nuestra tendencia a generalizarlos. En muchas ocasiones generalizamos, proyectamos los datos del presente para tratar de averiguar un comportamiento futuro y casi siempre nos va bien. Pero existen sistemas en los cuales no funciona: pequeñas variaciones o incertidumbres, en los datos iniciales desembocan en situaciones finales totalmente impredecibles. Son los llamados sistemas caóticos, la rama que estudia estos sistemas se le puede denominar "teoría del caos", y para tratarlos es preciso utilizar como herramienta matemática la geometría fractal.

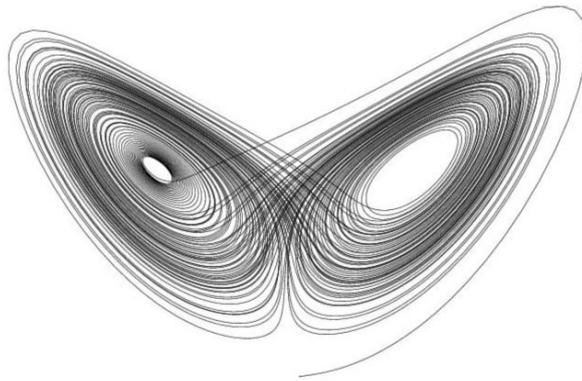
El percusor de la teoría del caos, fue el meteorólogo Edward Lorente (1917-2008). Estudiando la convección de la atmósfera mediante un sistema ecuaciones, se dio cuenta que con alteraciones mínimas de las variables iniciales, provocaban resultados muy divergentes. Este fenómeno se conoce como "Efecto Mariposa", el cuál de forma poética nos dice que: *"el aleteo de las alas de una mariposa en Hong Kong, puede desatar una tormenta en Nueva York"*.

El "Efecto Mariposa" es un fenómeno común de la teoría del caos, conocido como dependencia sensible de las condiciones iniciales. Sólo un pequeño cambio en las condiciones iniciales puede cambiar drásticamente el comportamiento a largo plazo.

Lorentz empezó a desarrollar su teoría del caos, y observó que aparentemente los sistemas de ecuaciones tienen un comportamiento aleatorio, pero al hacer los gráficos, dibujaban una doble espiral repetidamente.

En dichas ecuaciones existía cierto orden, siempre seguían un espiral. Esto nos lleva a uno de los postulados básicos de la teoría del caos que relaciona el orden y el caos en una dualidad. *No existen sistemas 100% ordenados, ni 100% caóticos. En todo sistema ordenado, el caos siempre está presente o implícito, a la vez que en todo sistema caótico, el orden siempre está presente o implícito.*

El **atractor** es uno de los conceptos fundamentales de la teoría del Caos, que se utiliza para representar la evolución en un sistema dinámico en un tiempo suficientemente largo.



Geométricamente, un atractor puede ser un punto, una curva, una

variedad en el caso de tratarse de un sistema estable, por lo contrario, si hablamos de un sistema caótico el atractor es una complicada estructura fractal conocido como atractor extraño.

Existen distintos tipos de atractores, dependiendo de su naturaleza:

- Atractores clásicos, todas las trayectorias convergen en un solo punto.
- Atractores extraños, tienen naturaleza fractal, es decir su estructura está producida por sucesivos plegamiento del espacio de fases sobre sí mismo. Tiene como característica que los puntos nunca se repiten y las orbitas nunca se interceptan.

•

Como ya hemos mencionado anteriormente, las características que definen a los sistemas caóticos:

- Son altamente sensibles a las condiciones iniciales. Un pequeño cambio en el punto de inicio puede causar un resultado enormemente diferente.

- Parecen desordenados y fortuitos, pero no lo son porque existe implícito un cierto patrón y sentido del orden.
- Son deterministas en tanto que existe alguna ecuación que gobierna su conducta.

Los mercados financieros son entornos complejos que se desarrollan entre el orden y el caos, donde pequeñas variaciones iniciales producen grandes cambios en los movimientos de los precios finales. Es decir, tienen alta sensibilidad en las condiciones iniciales, un simple rumor sobre la subida o bajada de acciones, puede causar a lo largo del tiempo que un sistema que parecía ordenado se transforme en un sistema totalmente caótico y que al parecer este regido más por el azar que por la naturaleza.

4. ANÁLISIS FRACTAL

En este capítulo detallaremos los procedimientos del análisis estadístico y fractal, que se basan en las siguientes pruebas: normalidad, distribución de colas pesada (Pareto-Lévy), prueba de invarianza a escala. En este apartado también desarrollaremos toda la metodología para el cálculo del coeficiente de Hurst, el cual nos permitirá conocer si los precios están correlacionados entre sí, y lo utilizaremos para calcular la dimensión fractal, propiedad fundamental de la geometría fractal.

4.1 ANÁLISIS ESTADÍSTICO

El análisis estadístico de la rentabilidad y su volatilidad ha consistido en determinar si su comportamiento se ajusta a una distribución normal y, además, identificar si cumplen con las distribuciones de colas pesadas (leptocúrticas).

Se ha realizado un análisis estadístico obteniendo datos como media, desviación estándar, curtosis, coeficiente de asimetría... y se ha mostrado en un gráfico de frecuencias para determinar si se comporta como una distribución normal o no.

A continuación se ha proseguido a dividir las series de datos de cada índice en 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 30, 40, 50 partes. De cada submuestra también se ha realizado un análisis estadístico y se ha seguido el proceso para obtener el coeficiente de Hurst, que en siguientes apartados vamos a desarrollar con más detalle.

4.1.1 Hipótesis del mercado fractal

La hipótesis del mercado fractal enfatiza el impacto de la liquidez y los horizontes temporales en el comportamiento de los inversores. El objetivo de la hipótesis fractal es proporcionar un modelo de comportamiento del inversor y movimientos de los precios de mercado que se adapte a nuestras observaciones.

El mercado se mantiene estable si participan varios inversores y éstos tienen **diferentes horizontes temporales**. Si se produce un desajuste a corto plazo de los precios, los participantes con un horizonte temporal más largo pueden entrar (aprovechando esta oportunidad) y estabilizar de nuevo los mercados. Siempre que otro inversor tenga un horizonte de trading más largo que el inversor en crisis, el mercado se estabilizará por sí mismo. Por este motivo, los inversores deben compartir los mismos niveles de riesgo (una vez realizado el ajuste para la escala de horizonte

de inversión), y el riesgo compartido explica porque la distribución de frecuencia de rentabilidades es similar a diferentes horizontes de inversión. Denominamos esta característica **Hipótesis del Mercado Fractal** debido a la estructura estadística auto-similar.

Los mercados se desestabilizan cuando se rompe la estructura fractal. Un ejemplo sería cuando los inversores con horizonte de inversión más a largo plazo o bien dejan de participar en el mercado o bien se convierten en inversores a corto plazo. Se reducen los horizontes de inversión cuando los inversores creen que la información fundamental (base de sus evaluaciones del mercado) ya no es importante o no son fiables.

Siempre que en el mercado existan inversores a diferentes horizontes, el pánico en un horizonte puede ser absorbido por otros horizontes de inversión como oportunidades de compra (o venta). No obstante, si todo el mercado tiene el mismo horizonte de inversión, entonces el mercado se desestabiliza. La falta de liquidez crea pánico.

Cuando el horizonte de inversión se convierte en uniforme, el mercado entra en caída libre: aparecen discontinuidades en la secuencia de los precios. En un entorno gaussiano, un cambio grande es como el resultado de muchas pequeñas variaciones. No obstante, cuando hay pánico el mercado hace grandes saltos en los precios. Las discontinuidades provocan grandes cambios, y las "**colas gruesas**" aparecen en la distribución de frecuencia de rentabilidades. Otra vez, estas discontinuidades se dan por la falta de liquidez causada por la aparición de un horizonte de inversión uniforme de los participantes del mercado.

Si la información recibida por el mercado es importante tanto para los inversores con horizontes de inversión a corto como a los de largo, entonces la liquidez también se puede ver afectada.

Cuanto más corto sea el horizonte de inversión, mayor importancia le da al análisis técnico, liquidez y actividad de trading. En cuanto el horizonte se alarga cede mayor importancia al análisis fundamental y factores económicos.

Como resumen, la hipótesis del mercado fractal propone lo siguiente:

1. El mercado es estable cuando en el mercado hay participantes a diferentes horizontes de inversión. Este hecho asegura la liquidez para los traders.

2. La información continua relacionada con el sentimiento del mercado y factores técnicos tiene más relevancia en el corto plazo. Cuando el plazo se alarga va dominando la información fundamental a largo plazo.
3. Cuando se produce un evento que cuestiona la validez de la información fundamental, los inversores con horizonte largo de inversión o bien dejan de participar en el mercado o bien reducen su horizonte de inversión. Cuando esto ocurre y todos los inversores unifican su horizonte a un nivel, entonces el mercado se vuelve inestable. En esta situación no hay inversores a largo plazo que estabilicen el mercado facilitando liquidez al mercado.
4. Los precios reflejan una combinación de información a corto plazo técnica e información a largo plazo fundamental. Los precios a corto plazo suelen ser más volátiles que las negociadas a más largo plazo.
5. Si un valor no está vinculado a los ciclos económicos, entonces no existirá horizonte de inversión a largo plazo. Dominará el trading, la liquidez y la información técnica a corto plazo.

4.1.2 Prueba normalidad

Es oportuno enfatizar que en estadística es posible demostrar que si consideramos una muestra de tamaño N perteneciente a una población que se distribuye normalmente (con media μ y desviación estándar σ) dicha muestra tendrá una distribución normal de media \bar{x} y desviación estándar $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

El teorema del límite central establece que cuando la muestra de tamaño N es suficientemente grande, la distribución de la muestra es aproximadamente normal.

La curva normal está centrada alrededor de la media, la cual se representa por μ . La variación o dispersión alrededor de la media se expresa en unidades de la desviación estándar, representada por σ .

En finanzas, la media es su rendimiento promedio y la desviación estándar es la volatilidad. Adicionalmente a la media y a la desviación estándar, la función de distribución de probabilidad normal tiene dos características: sesgo y la curtosis, a los cuales también se les conoce como tercer y cuarto momento, respectivamente.

El **sesgo** es un indicador que mide la simetría de la curva. En el caso de una curva normal perfecta, el sesgo será igual a cero. Si es negativa, la curva estará sesgada a la izquierda; si es positiva, la curva estará sesgada a la derecha.

$$\text{Sesgo} = \frac{\sum(x_i - \mu)^3}{(n - 1)\sigma^{3/2}}$$

Donde: x_i Nivel del índice en cada período expresado en días
 μ Media en el período
 σ Desviación estándar

La **curtosis** es el indicador que mide el nivel de levantamiento de la curva respecto a la horizontal. Esta situación se presenta cuando existen muchas observaciones alejadas de la media. A este fenómeno de alta curtosis también se le conoce como colas gruesas (*fat tails*). La curtosis de una distribución perfecta es igual a 3.

$$\text{Kurtosis} = \frac{\sum(x_i - \mu)^4}{(n - 1)\sigma^4}$$

4.1.3 Prueba de distribución de Pareto-Lévy (colas pesadas)

El análisis estadístico de las series de tiempo desarrolla un problema de suma importancia: determinar si una distribución de probabilidad es de cola pesada o no. Para entender la esencia matemática en esas series de tiempo financieras, son utilizados como "herramientas" las distribuciones de Lévy y el análisis espectral, los modelos multifractales, por nombrar algunos.

Las pruebas que permiten detectar si una serie de tiempo financiera responde a una distribución de Lévy o de cola pesada tienen como referencia la distribución normal. Una prueba utiliza el valor de la Curtosis, si es mayor que 3 la función es leptocúrtica.

Otra prueba consiste en estimar la desviación estándar (σ) de la serie de tiempo: determinar la distribución de frecuencia y estimar el área comprendida en el intervalo: $\mu \pm 3\sigma$. Si el área comprendida fuera de este intervalo, es mayor que 1%, significa que la serie financiera responde a una distribución de cola pesada. Si el área fuera del intervalo es igual a cero, significa que la serie responde a una distribución normal.

4.1.4 Prueba invarianza a escala.

Se define la invarianza de escala como una característica de los objetos que no cambia si la longitud de la escala es multiplicada por un factor constante. Por ejemplo, dada la función polinómica $f(x)=ax^k$, donde a y k son constantes, entonces $f(cx)=c^k ax^k$, donde c es una constante. Es decir, escalando el argumento de la función por un factor constante c , se produce un reescalamiento de la función por un factor constante c^k .

Igualmente, dado que la varianza S^2 de una distribución muestral de n datos es una función cuadrática, es sencillo comprobar cómo

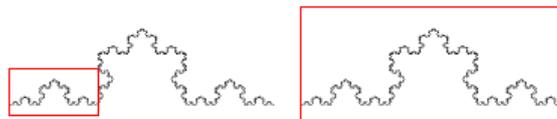
$$g(\sum_{t=1}^n f(x)) = S^2,$$

Donde

$$f(x)=ax^k$$
$$x = (x_i - \bar{x})$$
$$K = 2$$
$$a = \frac{1}{n}$$

Por tanto, si existe invarianza de escala, la varianza re-escalada sería $f(cx)=c^k ax^k$, es decir, $g(\sum_{t=1}^n f(cx)) = c^2 S^2$, siendo S^2 la varianza de la escala original.

Un ejemplo gráfico que explica esta invarianza a escala es la figura que se muestra a continuación. Una parte de la figura, señalada en el cuadro rojo es una copia a escala de la figura entera.



4.2 ANÁLISIS FRACTAL SERIES TEMPORALES

4.2.1 Exponente de Hurst

El coeficiente de Hurst indica la persistencia o no-persistencia en una serie temporal. De encontrarse persistencia en la serie, esta sería una fuerte señal de que dicha serie no es un ruido blanco y, por lo tanto, existiría algún tipo de dependencia entre los datos, es decir, comprobar si se comporta como un movimiento browniano ordinario o si por el contrario la serie presenta memoria.

Fue el hidrólogo Harold Edwing Hurst (1951) quien, estudiando como la capacidad de reserva de las represas del río Nilo debía fluctuar a través del tiempo, elaboró un estadístico para contrastar si el nivel de dichas reservas seguiría un paseo aleatorio.

Hurst conocía el trabajo de Einstein sobre el movimiento browniano, relativo al momento errático de una partícula suspendida en un fluido, que resumió en la fórmula $R = T^{1/2}$, donde R es la distancia recorrida por la partícula y T es el tiempo invertido en el recorrido. El principio establecido por la expresión anterior es el aplicado a la anualización de la volatilidad. Hurst intentó demostrar que los flujos del Nilo se producían con un patrón diferente a la pura aleatoriedad. Si pasamos de los cambios en los flujos diarios a cambios relativos en las cotizaciones diarias del mercado, podemos aplicar su método en nuestro campo.

El Análisis R/S se basa en determinar el rango ajustado $R(n)$, que equivale a la distancia que el sistema recorre en una unidad de tiempo n. Este rango, además, es "reescalado", esto es, normalizado en el sentido de que se termina con media cero y se expresa en términos de la desviación típica local (R/S). Obteniendo este valor para distintos valores de n (o T), es posible ajustar la función $R/S_n = Cn^H$, siendo C una constante y H el llamado índice de HURST.

4.2.2 Técnica de estimación del Coeficiente de Hurst y análisis R/S

El cálculo del coeficiente de Hurst viene dado de la siguiente ley de potencia:

$$R/S_N = a * N^H$$

Donde:

a : es una constante

N : es el número de observaciones

H : es el exponente o coeficiente de Hurst

$R/S N$: es el estadístico R/S que depende del tamaño de la serie y que se define como el rango de variación de la serie partido por su desviación típica.

El coeficiente de Hurst se utiliza para la detección de memoria a largo plazo en las series temporales. En caso de encontrarlo, tendríamos una clara evidencia de comportamiento no lineal.

El **procedimiento para el cálculo** del coeficiente de Hurst es el que se describe a continuación:

- Usando las variaciones diarias de los índices bursátiles americanos se obtiene una serie temporal que se describe como sigue: $X_t \quad t=1, \dots, T$
- Se particiona la muestra total en submuestras i de similar tamaño, donde $n = \frac{N}{i}$
- Se calcula la media y desviación típica de la serie temporal para cada submuestra:

$$m_{N,t_0} = \sum_{t=t_0+1}^{t_0+N} \frac{x_t}{N}$$

$$S_{N,t_0} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=t_0+1}^{t_0+N} [x_t - m_{N,t_0}]^2}$$

- Se obtiene una nueva serie para capturar la diferencia acumulada respecto a la media del índice:

$$y_{N,t_0,\tau} = \sum_{t=t_0+1}^{t_0+\tau} [x_t - m_{N,t_0}] \quad 1 \leq \tau \leq N$$

- Se determinan la diferencia máxima y mínima de cada partición. La diferencia de estos valores es el **rango** de cada submuestra:

$$R_{N,t_0} = \max_{\tau} y_{N,t_0,\tau} - \min_{\tau} y_{N,t_0,\tau}$$

f) Se obtiene el estadístico R/S (rango reescalado) dividiendo el rango por la desviación típica encontrada en c:

$$R/S \ N = \frac{\sum_{t_0} R \ N, t_0}{\sum_{t_0} S \ N, t_0}$$

g) Para cada partición se calcula el promedio del rango reescalado. Dado que el crecimiento de R/S sigue la ley de potencia descrita anteriormente, la potencia de dicha ecuación es el coeficiente de Hurst, el cual se obtiene de la siguiente regresión:

$$\log R/S = a + H \cdot \log N$$

4.2.3 Interpretación del exponente de Hurst

- Si $H = 0,5$ implica un proceso **independiente**. Es importante notar que un análisis (R/S) no requiere que el proceso subyacente se distribuya normalmente, sólo independiente. Como el análisis R/S es no paramétrico por lo que pueden considerarse distribuciones otro tipo de distribuciones como la t de student, gamma, etc.
- Si $0,5 < H \leq 1,0$ implica series de tiempo **persistentes**, es decir caracterizadas por efectos de memoria de largo plazo. Teóricamente lo que suceda hoy impactará en el futuro por siempre como por ejemplo cambios semanales de ahora están correlacionados con los cambios semanales futuros. Además se ha encontrado que las series persistentes son las más comunes encontradas en la naturaleza y en los mercados de capitales y economía. Por ejemplo, si $H=0,7$ nos indica que existe un 70% de probabilidades que el siguiente periodo siga la misma tendencia que en el periodo anterior.
- Si $0,0 \leq H < 0,5$ significa **antipersistencia** en la serie de tiempo. Un sistema antipersistente cubre menos distancia que uno aleatorio, en el caso de una partícula errática. Para que ocurra debe dar marcha atrás a sí mismo con mayor frecuencia que en un proceso aleatorio. Algunos teóricos igualan este comportamiento con un proceso de reversión a la media, que sin embargo asumo que el sistema bajo estudio tiene media estable. Suposición no tan fácilmente aceptada en este caso.

El Color del Ruido y la Dimensión Fractal

- Si $0 \leq H < 0,5$ se considera que se tiene **ruido rosa** y está relacionado con la antipersistencia. El ruido rosa abunda en la naturaleza y está relacionado a procesos de relajación (equilibrio dinámico) y turbulencia.
- Si $0,5 < H \leq 1,0$ se tienen un **ruido negro**. Este ruido aparece en procesos cíclicos de largo plazo, como nivel de ríos, número de manchas solares y cambios de precios en las bolsas de valores.
- A partir del exponente H puede determinarse la dimensión fractal como $D = 2 - H$, un movimiento browniano tiene una dimensión fractal de 1,5. Si $H > 0,5$ la dimensión fractal disminuirá y tenderá a acercarse a una recta, en el caso contrario si $H < 0,5$ la dimensión fractal aumentará y se acercara a una superficie.

4.2.4 Cálculo de la dimensión fractal

Uno de los procedimientos para caracterizar e incluso para clasificar los objetos fractales consiste en atribuir a cada uno de ellos una cantidad numérica, la dimensión fractal. Por medio de este índice matemático se puede cuantificar la geometría de los objetos o de los fenómenos fractales. Para calcular la dimensión fractal utilizaremos el exponente de Hurst.

Una de las interpretaciones de la dimensión, posiblemente la más natural, se relaciona con la capacidad de los objetos para ocupar el espacio euclidiano en el que se encuentran ubicados. Es decir, la dimensión ayudará en la determinación del contenido o medida de un conjunto, en particular de los conjuntos fractales.

Encontramos una diferencia fundamental con los objetos euclidianos: si magnificamos sucesivamente un objeto euclidiano "unidimensional", observamos segmentos rectilíneos. Sin embargo, si magnificamos sucesivamente un objeto fractal, encontramos objetos con niveles de complicación comparables a los del conjunto de partida.

Para calcular la dimensión fractal, Mandelbrot (1982) utiliza el exponente de Hurst. Éste indica que si el exponente de Hurst se encuentra entre 0.5 y 1, éste se puede relacionar con la **dimensión fractal** de la siguiente manera:

$$D_f = D_e - H$$

Donde:

- D_f** → Dimensión Fractal.
- D_e** → Dimensión euclidiana.
- H** → Coeficiente de Hurst.

De esta manera, la dimensión fractal toma valores: $1 < D_f < 1,5$.

- $H > 0,5$ → D. fractal disminuirá y tenderá a acercarse a una recta.
- $H < 0,5$ → D. fractal aumentará y tenderá a acercarse a un plano.

5. APLICACIÓN MÉTODO FRACTAL A ÍNDICES BURSÁTILES Y DIVISAS

En este apartado realizaremos un análisis estadístico, probabilístico y fractal para estudiar distintas series de tiempo tanto de índices bursátiles como divisas y volatilidad.

Estimaremos el exponente de Hurst, cuyo valor es un estadístico de prueba que indica si la serie de tiempo es persistente o anti-persistente o aleatorio. Asimismo demostraremos que dichas series de tiempo se ajustan a funciones de distribución de probabilidad de cola gruesa (distribuciones Pareto-Lévy) y que cumplen con las propiedades fractales.

Presentamos a continuación la estructura de análisis y los pasos seguidos:

- Selección de series para el análisis.
- Análisis estadístico de las series.
- Determinar si la rentabilidad de las series cumplen una distribución normal.
- Estimación del coeficiente de Hurst.
- Cálculo de la dimensión fractal.
- Identificar invarianza a escala.

La fase inicial de nuestro estudio empieza en la elección de series a analizar. Se considera interesante analizar distintos activos representativos del mercado, para detectar si tienen comportamientos análogos.

El principal criterio de selección se ha basado en encontrar series largas y de alta frecuencia ya que nos permite mayores posibilidades de análisis y de fiabilidad para obtener conclusiones más contundentes. Es por este motivo que hemos escogido los principales índices bursátiles americanos, ya que disponemos de información histórica desde principios de siglo XX; otra razón es por la importancia mundial de los parques americanos en evolución de los mercados financieros a nivel mundial.

Como se ha comentado anteriormente, hemos ampliado el estudio en la selección de otros activos como es el mercado de divisas. Se ha seleccionado el cambio de divisa dólar-yen (USDJPY) y el dólar-libra (USDGBP). Divisas con más volumen y con más datos históricos. No hemos podido tener en cuenta el estudio del euro-dólar, dado que su serie histórica sólo comprendía nueve años.

Por último, hemos incluido el VIX Índice ya que precisamente este índice no es de precios sino de volatilidades del S&P, que se puede utilizar para contrastar la hipótesis de si el mercado tiene volatilidades constantes o no.

5.1 S&P

La información de esta serie contiene datos mensuales de precios comprendidos entre diciembre de 1927 hasta marzo 2009.

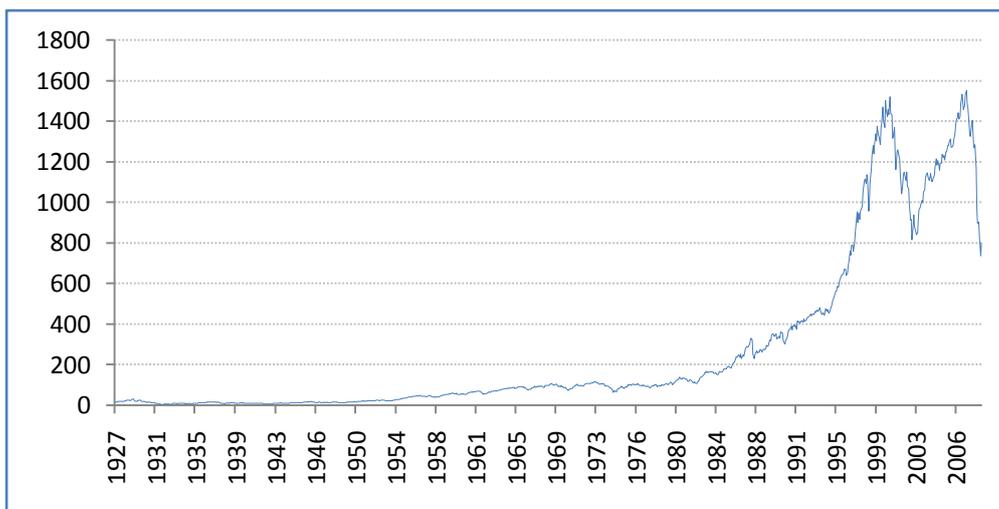


Gráfico evolución de precios mensuales entre diciembre 1927 – Marzo 2009

El siguiente gráfico corresponde a las rentabilidades mensuales del periodo de estudio. Destacamos que hay ciertos periodos en el tiempo donde se amplifican estas variaciones, cuestión que nos da indicios de que no se trata de una serie con comportamiento aleatorio.

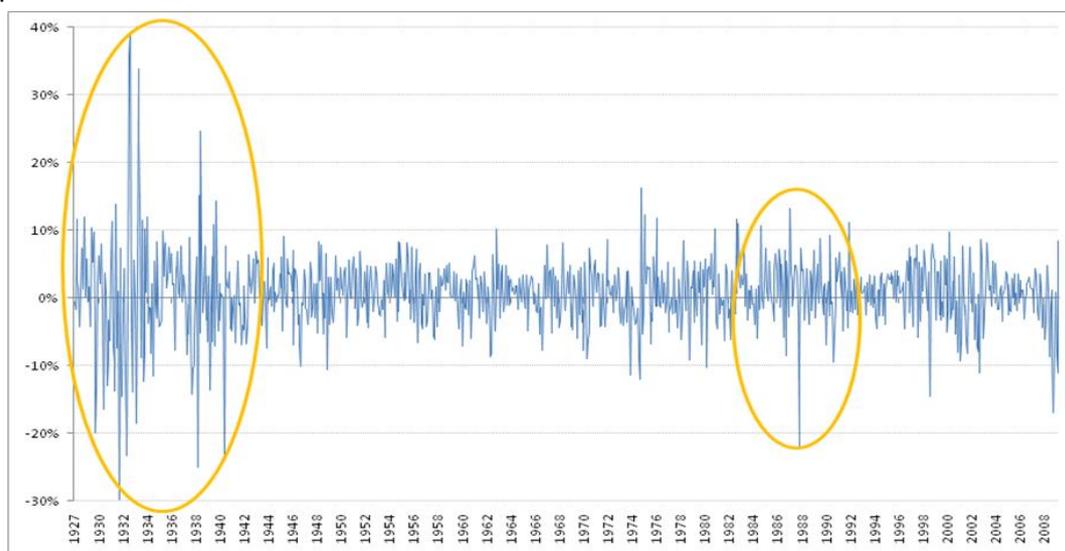
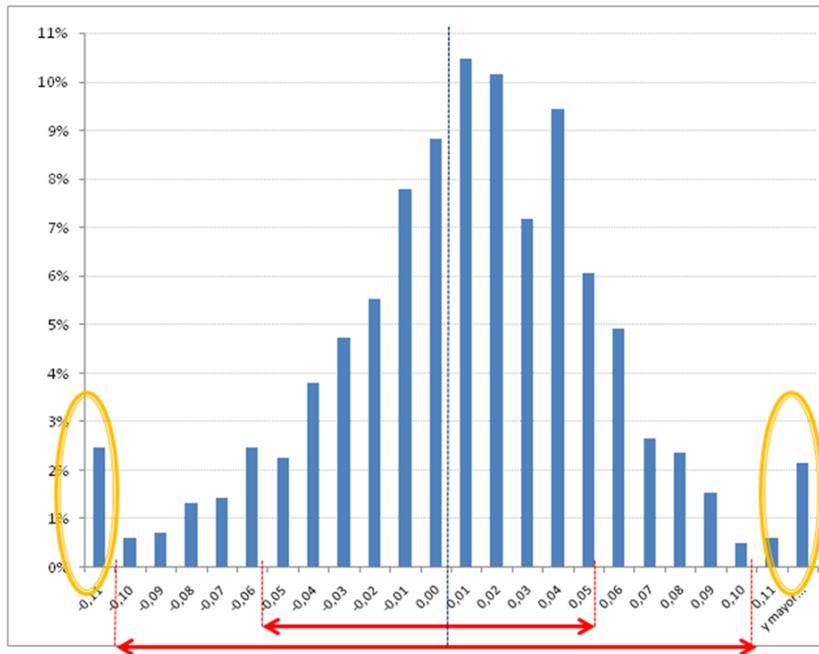


Gráfico rentabilidades mensuales entre diciembre 1927 – Marzo 2009

Gráfico de distribución de rentabilidades mensuales desde 1927 hasta 2009

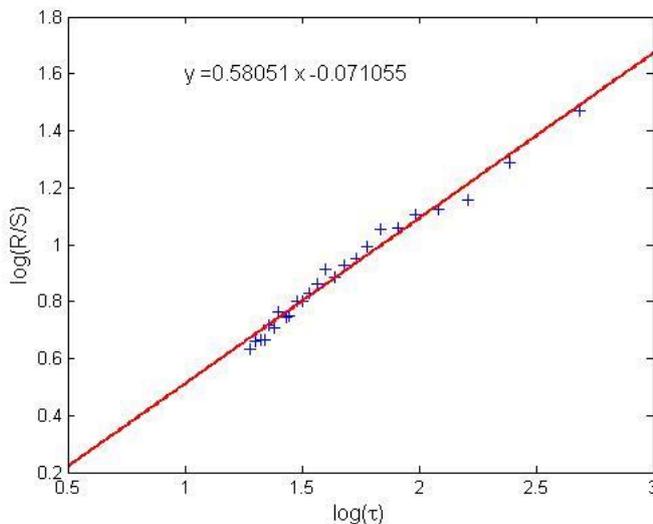


Num observaciones	975
Media	0,00546
Desviación estándar	0,05548
Varianza de la muestra	0,00308
Curtosis	8,00971
Coefficiente de asimetría	0,17272
Rango	0,6908
Mínimo	-0,29942
Máximo	0,39138
Nivel de confianza(95,0%)	0,00349

Intervalos		
-0,05003	0,06094	68%
-0,10551	0,11643	95%
-0,16099	0,17191	99%

Dentro de este periodo analizado se disponen de 975 datos. Cuya media se sitúa en 0,55% y su desviación estándar es del 5,54%. Si realizamos la prueba de normalidad entre el rango $[x-2\sigma; x+2\sigma]$ debería comprender el 95% de las observaciones, para seguir una distribución normal. Visualmente observamos que los datos fuera de este rango tienen una frecuencia superior al 5% (colas pesadas). Otro estadístico relevante es la curtosis, cuando una distribución normal le corresponde un valor de 3, en esta serie tiene una curtosis de 8,01 es decir, leptocúrtica. Observamos que la muestra está desviada hacia la derecha, mostrando mayor frecuencia en los valores positivos.

Exponente de Hurst S&P



S&P	nº datos	R/S	Ln(n)	Ln(R/S)
1	975	46,329	6,882	3,836
2	488	36,028	6,190	3,584
3	325	25,402	5,784	3,235
4	244	21,735	5,497	3,079
5	195	18,525	5,273	2,919
10	98	12,781	4,585	2,548
20	49	8,900	3,892	2,186
30	33	6,067	3,497	1,803
40	24	5,096	3,178	1,628
50	20	4,391	2,996	1,480
100	10	2,787	2,303	1,025

Recta de regresión donde la pendiente es el Coeficiente de Hurst.

Como se muestra en la tabla se ha realizado el proceso para obtener el coeficiente de Hurst, dividiendo la muestra en 1, 2, 3, ... 100 partes y obteniendo el estadístico R/S. Con estos datos obtenemos el coeficiente de Hurst que representa la pendiente de la recta del gráfico anterior.

S&P 500		
Periodo datos	Coef. Hurst	Dimensión fractal
Diarios	0,5740	1,4260
Semanales	0,5805	1,4195
Mensuales	0,5807	1,4193
Anual	0,5869	1,4132

Hemos calculado el exponente de Hurst seleccionando datos diarios, semanales, mensuales y anuales. Analizando los resultados vemos que independientemente del periodo de estudio, el coeficiente de Hurst es siempre superior a 0,5.

El coeficiente indica que la serie es persistente, es decir, que presenta efectos de memoria a largo plazo. Este dato junto al análisis estadístico realizado en el apartado anterior contradice la teoría del movimiento browniano aleatorio.

El coeficiente de Hurst, tal y como se ha indicado en anteriores apartados, nos permite calcular la dimensión fractal dado que $D=2-H$, por tanto nos da una dimensión fraccionaria comprendida entre 1 y 2.

Prueba invarianza a escala

Para realizar esta prueba hemos elegido datos de periodos y frecuencias diferentes en el tiempo. En los gráficos a continuación se puede observar que se repite un cierto patrón, y si estos gráficos no nos indican el eje del tiempo no sabrías distinguir si corresponden a datos diarios, semanales, mensuales o anuales.



S&P datos mensuales (Diciembre 1994 – Octubre 2000)



S&P datos diarios (30 Junio 2006 – 26 Febrero 2007)

5.2 Dow Jones

La información de esta serie son datos mensuales de precios comprendidos entre enero de 1900 hasta marzo 2009, un total de 1306 datos.

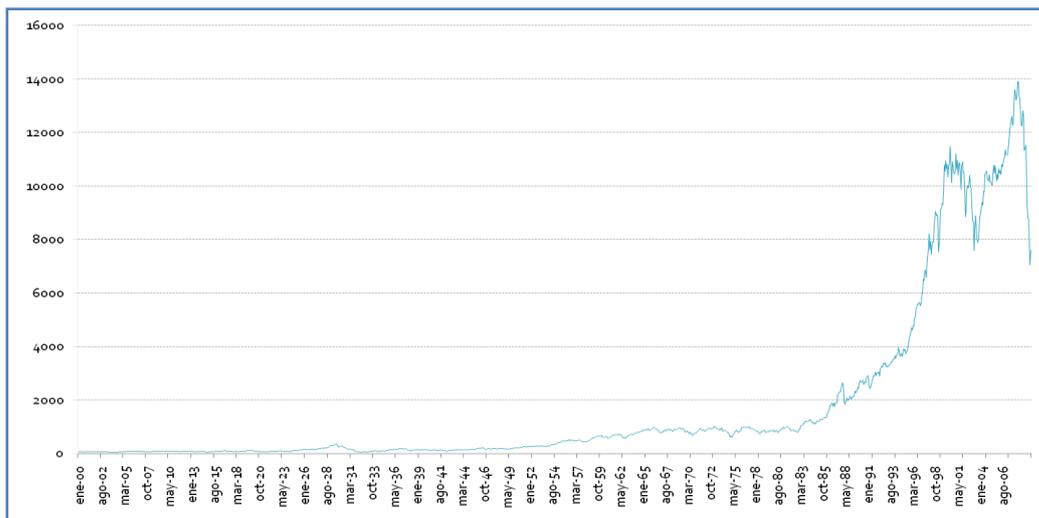


Gráfico evolución de precios mensuales entre enero 1900 – Marzo 2009

El siguiente gráfico corresponde a las rentabilidades mensuales del periodo de estudio. Destacamos que hay ciertos periodos en el tiempo donde se amplifican estas variaciones, cuestión que nos da indicios de que no se trata de una serie con comportamiento aleatorio.

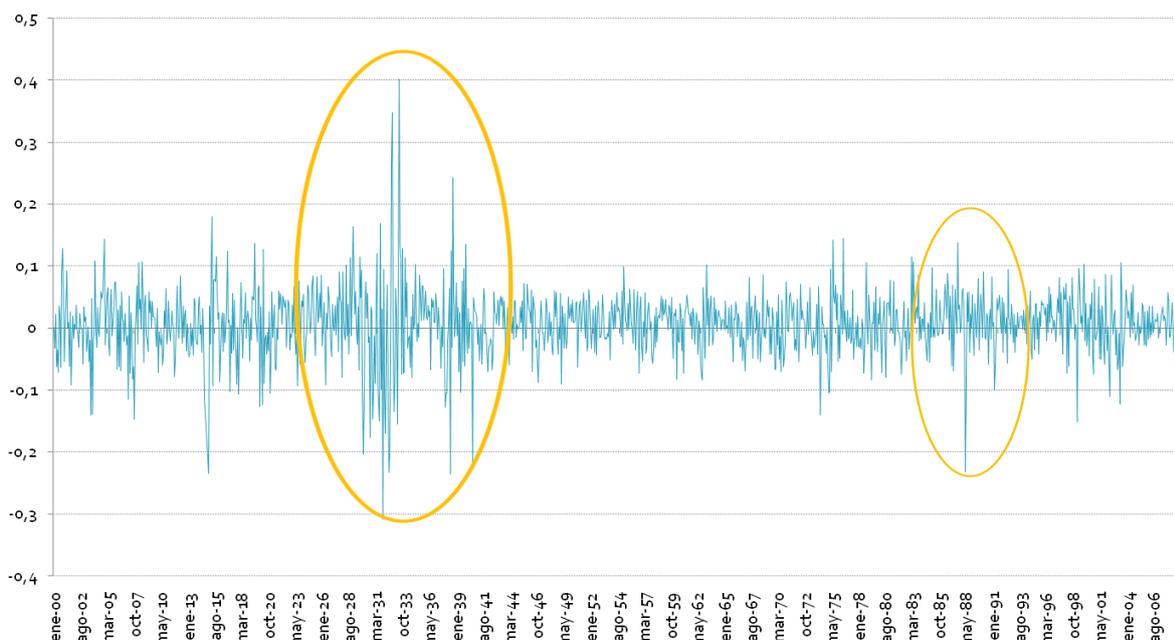


Gráfico rentabilidades mensuales entre enero 1900 - Marzo 2009

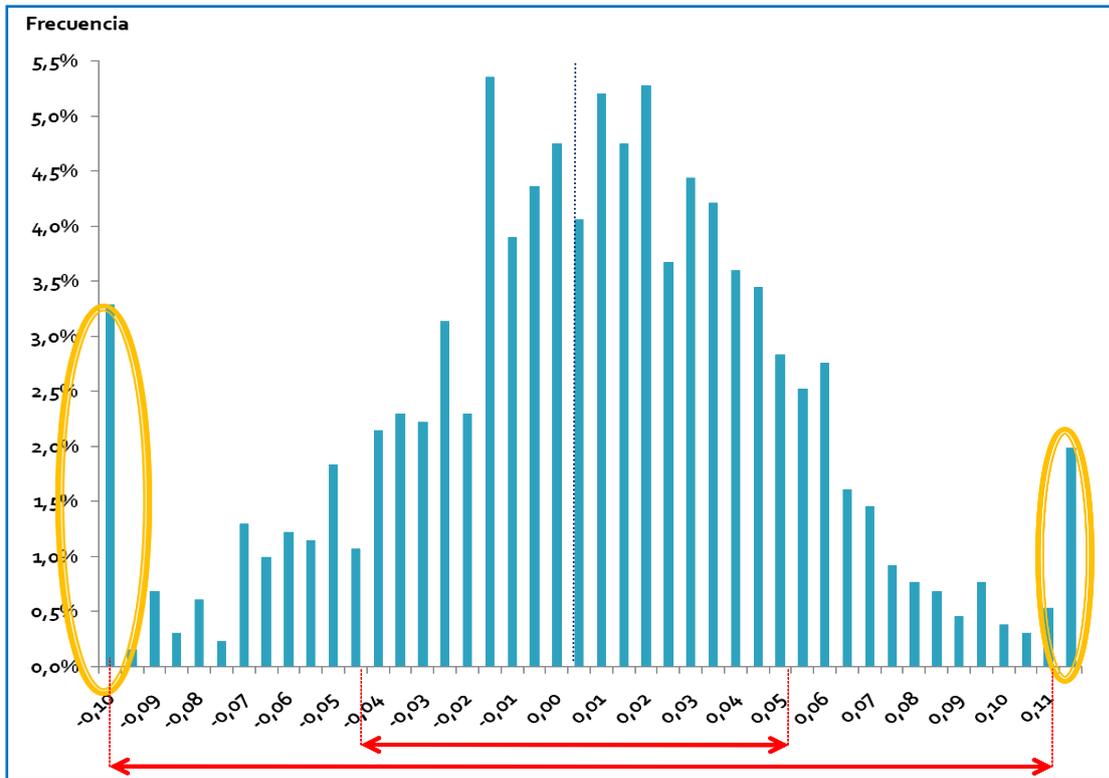
Gráfico de distribución de rentabilidades mensuales desde 1900 hasta 2009

Dentro de este periodo analizado se disponen de 1306 datos. Cuya media se sitúa en 0,51% y su desviación estándar es del 5,39%. Si realizamos la prueba de normalidad entre el rango [-0,1027; 0,1129] debería comprender el 95% de las observaciones, para seguir una distribución normal. Visualmente observamos que los datos fuera de este rango tienen una frecuencia muy superior al 5% (colas pesadas).

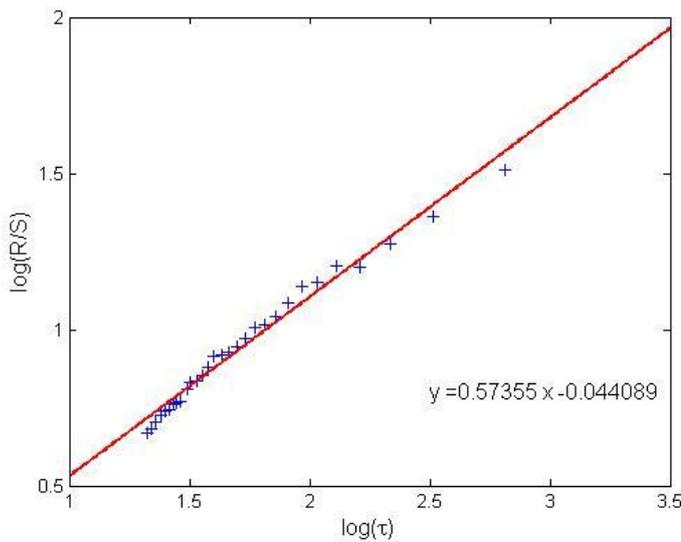
Otro estadístico relevante es la curtosis, cuando una distribución normal le corresponde un valor de 3, en esta serie tiene una curtosis de 6,35, es decir, leptocúrtica.

Número observaciones	1306
Media	0,0051
Desviación estándar	0,0539
Varianza de la muestra	0,0029
Curtosis	6,3477
Coefficiente de asimetría	-0,0572
Rango	0,7110
Mínimo	-0,3092
Máximo	0,4018
Nivel de confianza(95,0%)	0,0029

Intervalos		
-0,0488	0,0590	68%
-0,1027	0,1129	95%
-0,1566	0,1668	99%



Exponente de Hurst DOW JONES



DJI	nº datos	R/S	Ln(n)	Ln(R/S)
1	1307	45,666	7,175	3,821
2	654	36,237	6,482	3,590
3	436	30,693	6,077	3,424
4	327	23,429	5,789	3,154
5	261	20,531	5,566	3,022
10	131	14,870	4,873	2,699
20	65	9,961	4,180	2,299
30	44	6,941	3,774	1,937
40	33	6,568	3,487	1,882
50	26	5,483	3,263	1,702

Como se muestra en la tabla se ha realizado el proceso para obtener el coeficiente de hurst, dividiendo la muestra en 1, 2, 3, ... 50 partes y obteniendo el estadístico R/S. Con estos datos obtenemos el coeficiente de hurst que representa la pendiente de la recta del gráfico anterior.

Este análisis se ha efectuado seleccionando series datos diarios, semanales, mensuales y anuales. Los resultados de los cuales los encontramos en el cuadro adjunto. Analizando estos datos vemos que independientemente del periodo de estudio,

DOW JONES		
Periodo datos	Coef. Hurst	Dimensión fractal
Diarios	0,5736	1,4265
Semanales	0,5938	1,4062
Mensuales	0,5856	1,4144
Anual	0,5729	1,4271

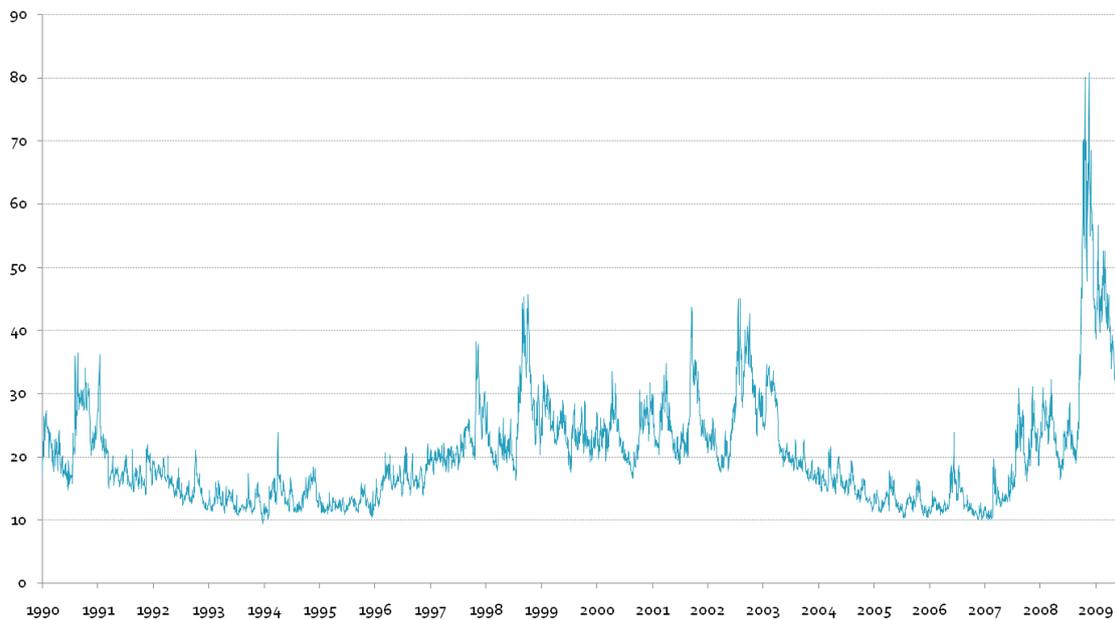
el coeficiente de Hurst es siempre superior a 0,5, y con un valor entre 0,57 y 0,59.

Esto nos indica que los precios no son independientes ($H=0,5$), la serie es **persistente**, tiene memoria a largo plazo, es decir, después de un periodo alcista, existe una mayor probabilidad que el periodo siguiente sea alcista. Este dato junto al análisis estadístico realizado en el apartado anterior contradice la teoría del movimiento browniano aleatorio.

El coeficiente de Hurst, tal y como se ha indicado en anteriores apartados, nos permite calcular la dimensión fractal, propiedad característica de una estructura fractal. Al definirse la dimensión como $D=2-H$, el resultado es un número fraccionario cercano a 1,42.

5.3 VIX INDEX

La información de esta serie contiene datos diarios de precios comprendidos entre 2 de enero de 1990 hasta el 18 de Junio del 2009, con un total de 4907 observaciones. El mínimo de la serie fue 9,31 (22/12/1993) y el máximo 80,86 (20/11/2008). El rango de variación de la serie es 71,55.



El siguiente gráfico corresponde a las rentabilidades diarias del periodo de estudio. Destacamos que hay ciertos periodos en el tiempo donde se amplifican estas variaciones, cuestión que nos da indicios de que no se trata de una serie con comportamiento aleatorio.

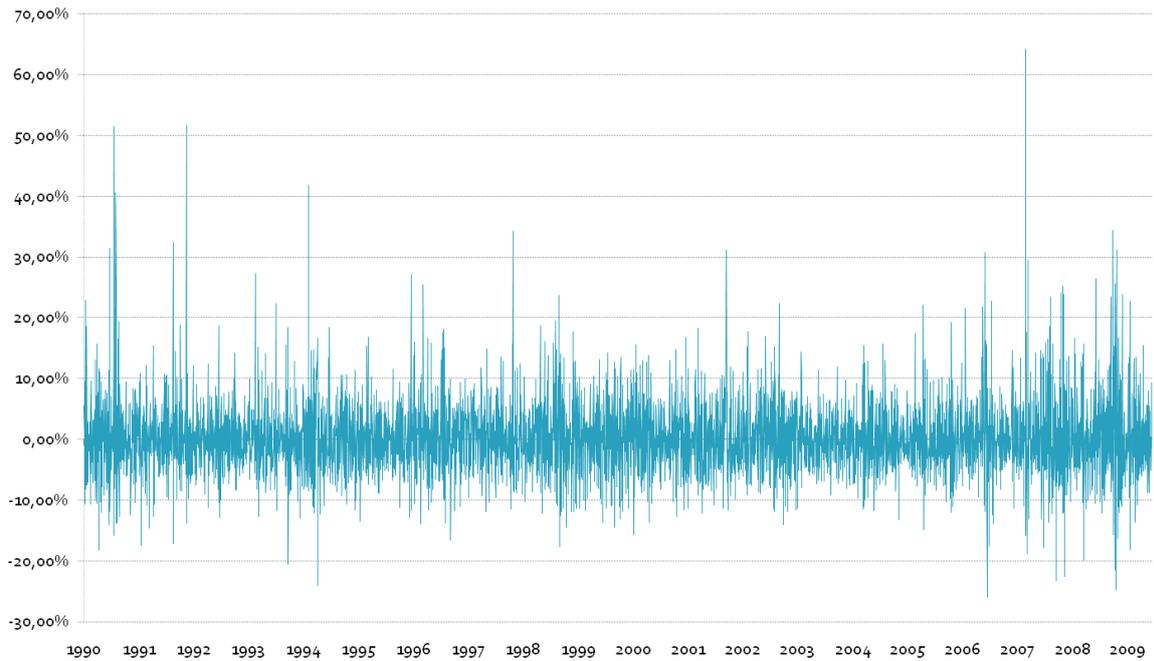
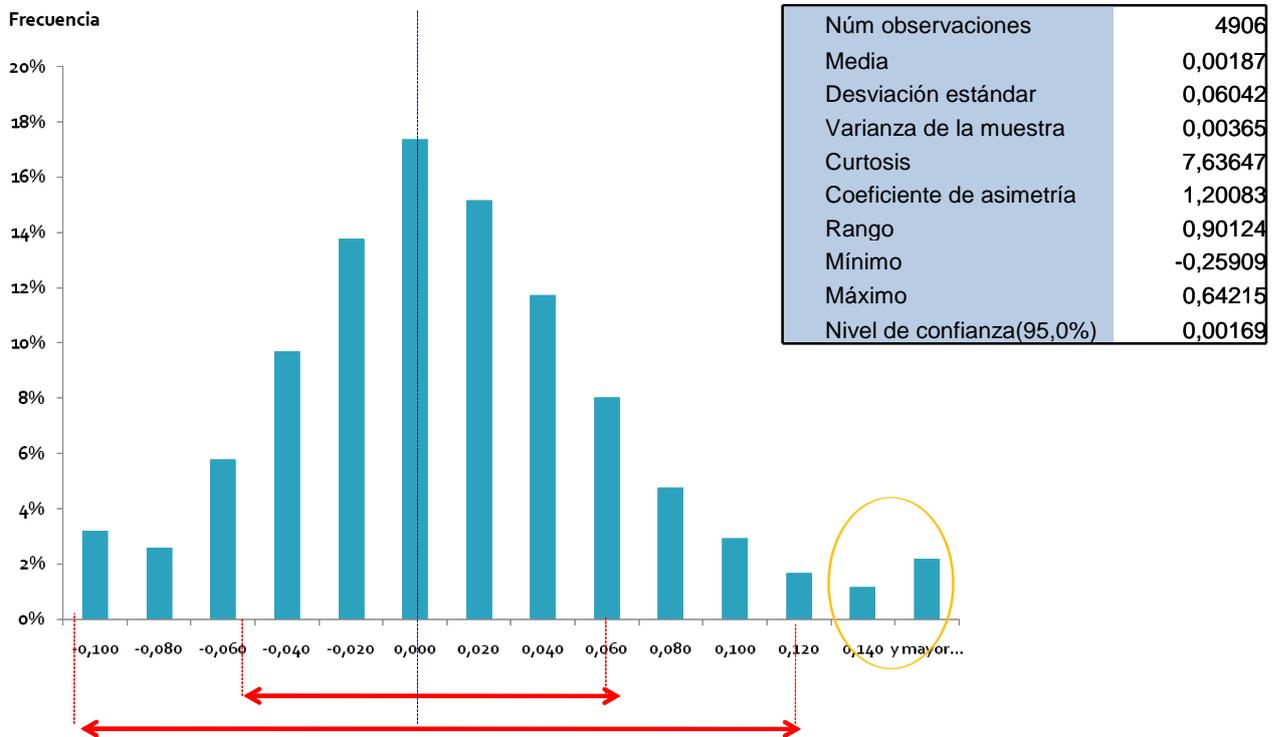


Gráfico variaciones mensuales VIX Índice entre enero 1990 – Marzo 2009

Gráfico de distribución de rentabilidades diarias: enero 1990 - Junio 2009

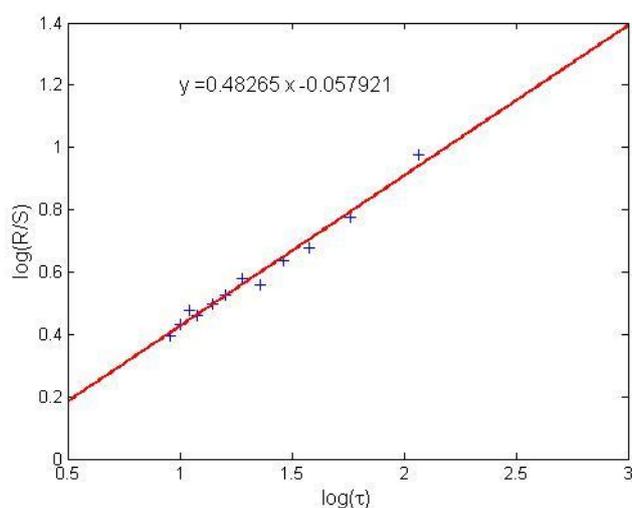


Dentro de este periodo analizado se disponen de 4906 datos. Cuya media se sitúa en 0,019% y su desviación estándar es del 6,04%. Si realizamos la prueba de normalidad entre el

Intervalos		
-0,0585	0,0623	68%
-0,1190	0,1227	95%
-0,1794	0,1831	99%

rango [-0,1190, 0,1227] debería comprender el 95% de las observaciones, para seguir una distribución normal. Visualmente observamos que existe más del 2,5% de las observaciones con variaciones superiores a 12,27%. Otro estadístico relevante es la curtosis, cuando una distribución normal le corresponde un valor de 3, en esta serie tiene una curtosis de 7,63 es decir, es decir es leptocúrtica. Por tanto no sigue una distribución normal. Un mejor ajuste para estos datos sería la distribución de Pareto-Lévy. Observamos también que la muestra está desviada hacia la derecha, tiene asimetría positiva, mostrando mayor frecuencia en los valores positivos.

Exponente de Hurst VIX INDEX



VIX	nº datos	R/S	Ln(n)	Ln(R/S)
1	4906	47,985	8,498	3,871
2	2453	38,071	7,805	3,639
3	1635	30,997	7,400	3,434
4	1227	27,871	7,112	3,328
5	981	22,775	6,889	3,126
10	491	16,536	6,196	2,806
20	245	13,536	5,502	2,605
30	164	11,574	5,097	2,449
40	123	10,299	4,809	2,332
50	98	9,228	4,586	2,222

Como se muestra en la tabla se ha realizado el proceso para obtener el coeficiente de Hurst, dividiendo la muestra en 1, 2, 3, ... 30 partes y obteniendo el estadístico R/S. Con estos datos obtenemos el coeficiente de Hurst que representa la pendiente de la recta del gráfico anterior. Cabe destacar que este índice es de más reciente creación y por ello hemos realizado el análisis con datos diarios.

VIX		
Periodo datos	Coef. Hurst	Dimensión fractal
Diarios	0,4122	1,5878
Semanales	0,4827	1,5174
Mensuales	0,4120	1,5880

Hemos calculado el exponente de Hurst seleccionando datos diarios, semanales, mensuales y anuales. Analizando los resultados vemos que independientemente del periodo de estudio, el coeficiente de Hurst es parecido.

Al contrario que los análisis anteriores, en este caso el exponente de Hurst es inferior a 0,5, lo que nos indica que la serie es antipersistente, el comportamiento de la serie será más cercana a un proceso de tipo "mean reverting". Es decir si el sistema es alcista en un periodo previo, es más probable que en el siguiente periodo cambie a la

baja. Este dato junto al análisis estadístico realizado en el apartado anterior contradice la teoría del movimiento browniano aleatorio.

El coeficiente de Hurst, tal y como se ha indicado en anteriores apartados, nos permite calcular la dimensión fractal, propiedad característica de una estructura fractal. Al definirse la dimensión como $D=2-H$, el resultado es un número fraccionario cercano a 1,58. El índice de volatilidad posee una dimensión fractal mayor que los índices bursátiles.

5.4 TIPO CAMBIO USDJPY

La información de esta serie contiene datos diarios de precios comprendidos entre 4 de enero de 1971 hasta el 18 de Junio del 2009, con un total de 10.035 observaciones. El mínimo de la serie fue 80,63 (18/04/1995) y el máximo 358,44 (13/01/1971). El rango de variación de la serie es 277,81.

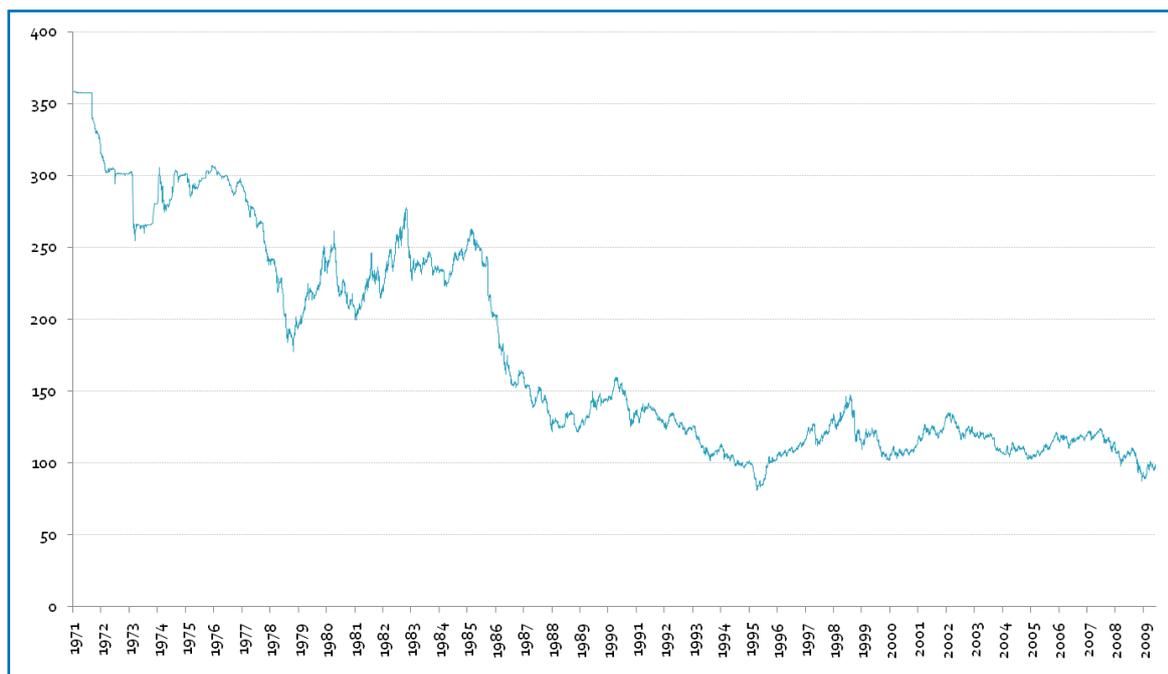


Gráfico evolución cotización diaria USDGBP entre 4 enero 1971 – 18 Junio 2009

El siguiente gráfico corresponde a las rentabilidades diarias del periodo de estudio. Destacamos que hay ciertos periodos en el tiempo donde se amplifican estas variaciones, cuestión que nos da indicios de que no se trata de una serie con comportamiento aleatorio.

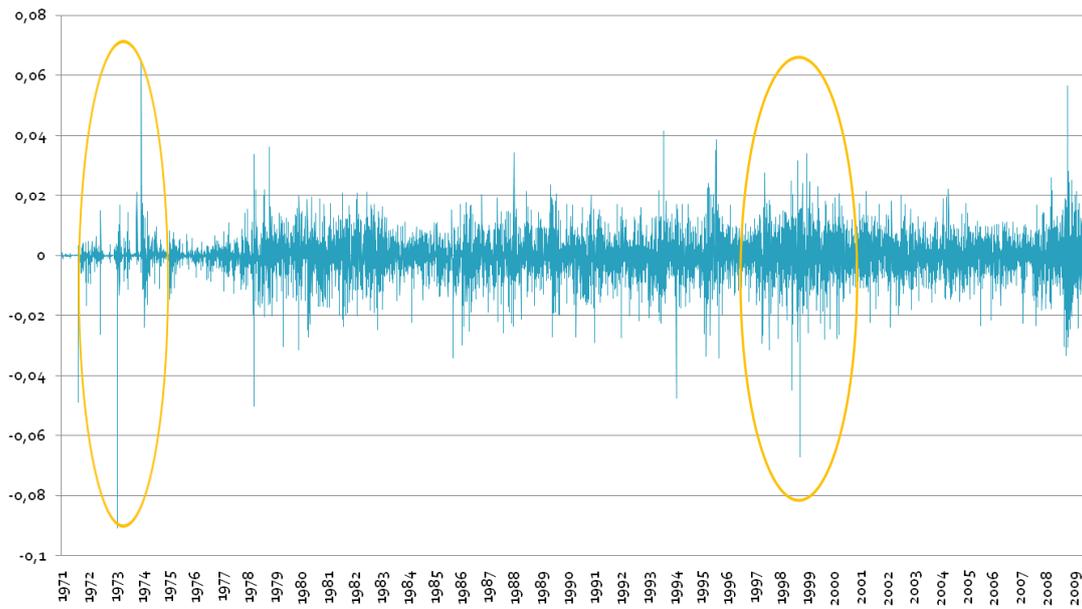
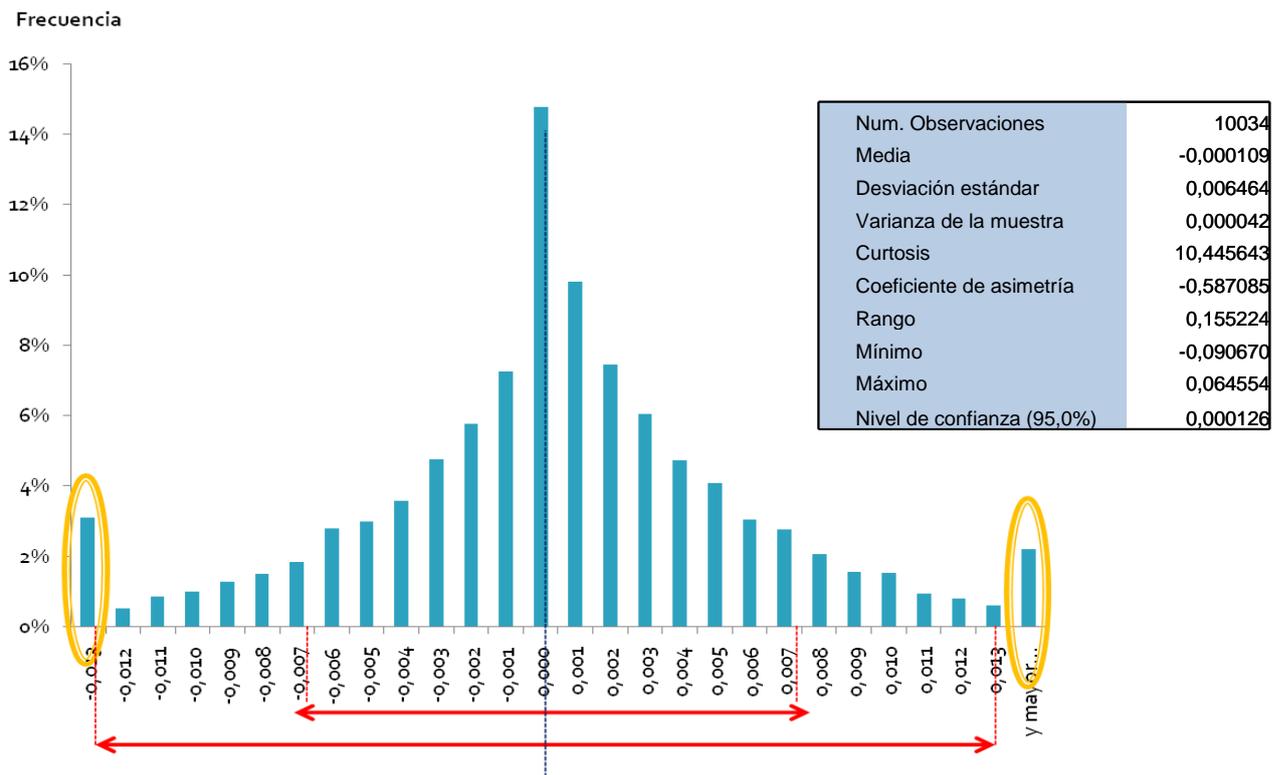


Gráfico evolución variación diaria USDJPY entre 4 enero 1971 - 18 Junio 2009

Gráfico de distribución rentabilidades diarias: Enero 1971 - Junio 2009



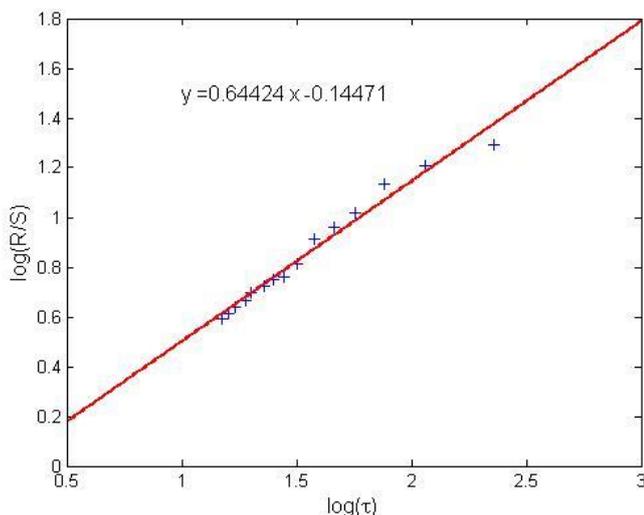
Dentro de este periodo analizado se disponen de 10034 datos. Cuya media se sitúa en 0,011% y su desviación estándar es del 6,46%. Si realizamos la prueba de normalidad

Intervalos		
-0,0066	0,0064	68%
-0,0130	0,0128	95%
-0,0195	0,0193	99%

entre el rango $[-0,0130; 0,0128]$ debería comprender el 95% de las observaciones, para seguir una distribución normal. Visualmente observamos que los datos fuera de este rango

tienen una frecuencia superior al 5% (colas pesadas). Otro estadístico relevante es la curtosis, cuando una distribución normal le corresponde un valor de 3, esta serie tiene una curtosis muy superior de 10,45 es decir, leptocúrtica.

Exponente de Hurst USDJPY



USDJPY	n	R/S	LN(N)	LN(R/S)
1	10035	155,413	9,214	5,046
2	5018	99,058	8,521	4,596
3	3345	93,799	8,115	4,541
4	2509	86,981	7,828	4,466
5	2007	72,880	7,604	4,289
10	1004	47,860	6,912	3,868
20	502	29,637	6,219	3,389
30	335	24,589	5,814	3,202
40	251	20,430	5,525	3,017
50	201	18,263	5,303	2,905
100	100	11,990	4,605	2,484
500	20	4,474	2,996	1,498

Como se muestra en la tabla se ha realizado el proceso para obtener el coeficiente de Hurst, dividiendo la muestra en 1, 2, 3,... 500 partes y obteniendo el estadístico R/S. Con estos datos obtenemos el coeficiente de Hurst que representa la pendiente de la recta del gráfico anterior.

USDJPY		
Periodo datos	Coef. Hurst	Dimensión fractal
Diarios	0,6442	1,35576
Semanales	0,6299	1,37010
Mensuales	0,6280	1,37202

Hemos calculado el exponente de Hurst seleccionando datos diarios, semanales y mensuales. Analizando los resultados vemos que independientemente del periodo de estudio, el coeficiente de Hurst sale un valor similar, en torno a 0,62 y superior a 0,5.

El coeficiente indica que la serie es persistente, es decir, que presenta efectos de memoria a largo plazo. Este dato junto al análisis estadístico realizado en el apartado anterior contradice la teoría del movimiento browniano aleatorio.

El coeficiente de Hurst, tal y como se ha indicado en anteriores apartados, nos permite calcular la dimensión fractal, propiedad característica de una estructura fractal. Al definirse la dimensión como $D=2-H$, el resultado es un número fraccionario cercano a 1,37.

Prueba invarianza a escala

Para realizar esta prueba hemos elegido datos de periodos y frecuencias diferentes en el tiempo. En los gráficos a continuación se puede observar que se repite un cierto patrón, y si en estos gráficos no se mostrará el eje del tiempo no sabríamos distinguir si corresponden a datos diarios, semanales, mensuales o anuales.



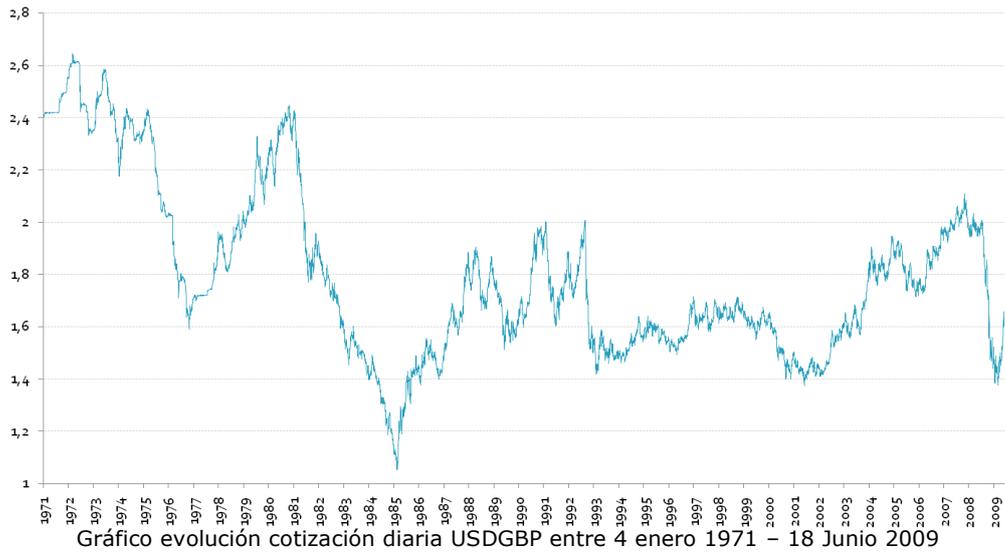
USDJPY datos semanales (7 de Abril 1995 – 4 de Abril 1997)



USDJPY datos diarios (31 de Julio 2006 – 13 de Octubre 2006)

5.5 TIPO CAMBIO USDGBP

La información de esta serie contiene datos diarios de precios comprendidos entre 4 de enero de 1971 hasta el 18 de Junio del 2009, con un total de 10035 observaciones. El mínimo de la serie fue 1,052 (18/04/1995) y el máximo 2,644(13/01/1971). El rango de variación de la serie es 1,592.



El siguiente gráfico corresponde a las rentabilidades diarias del periodo de estudio. Destacamos que hay ciertos periodos en el tiempo donde se amplifican estas variaciones, cuestión que nos da indicios de que no se trata de una serie con comportamiento aleatorio.

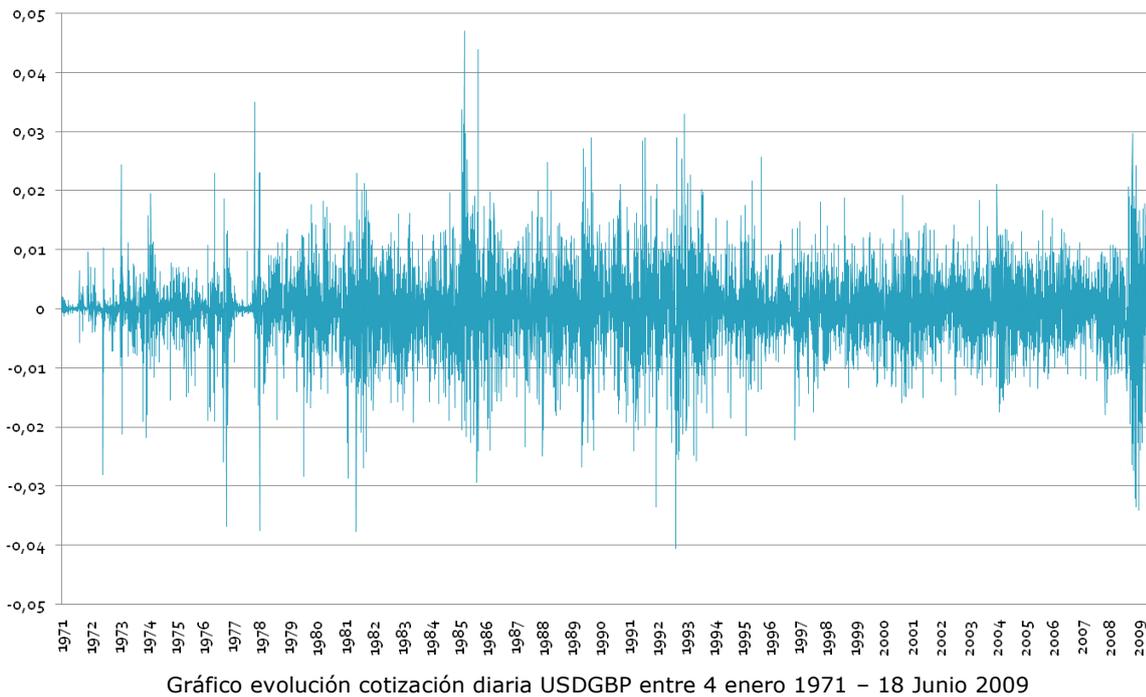
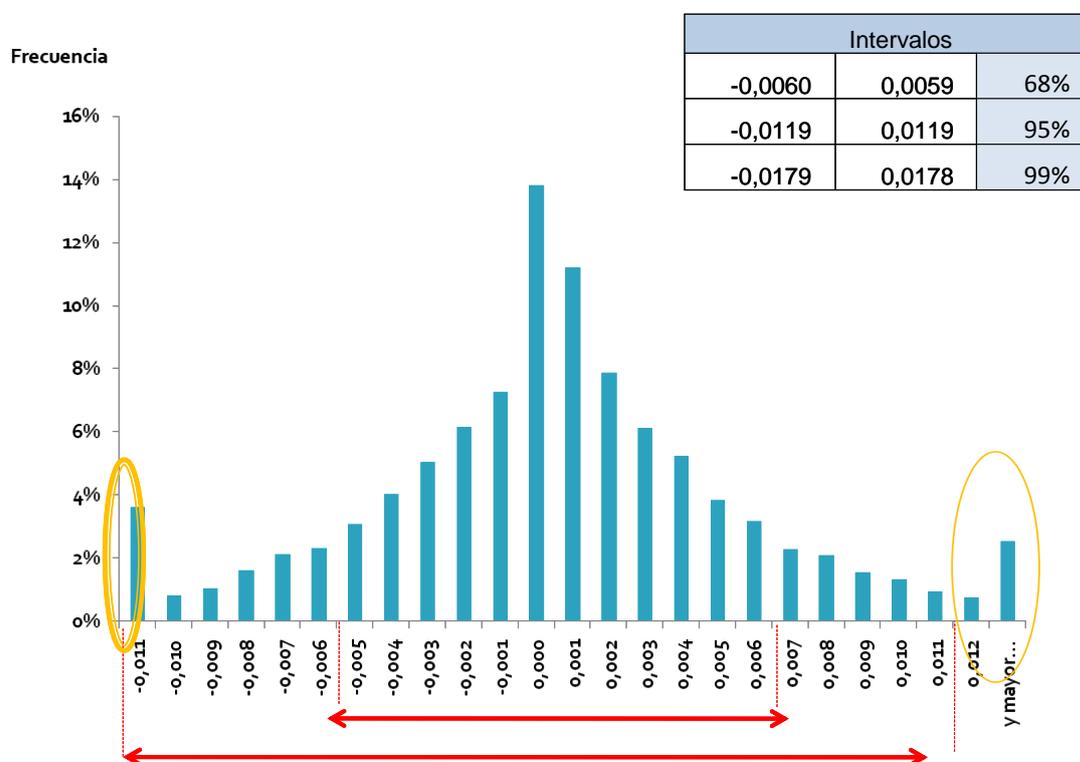


Gráfico distribución de rentabilidades diarias: Enero 1971 - Junio 2009

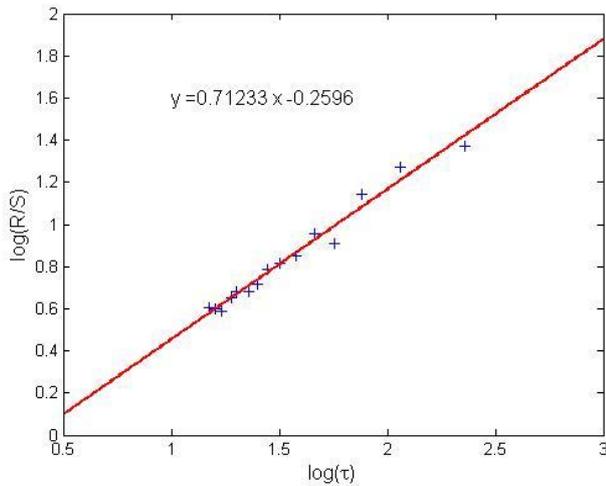
Dentro de este periodo analizado se disponen de 10034 datos. Cuya media se sitúa prácticamente en 0 y su desviación estándar es del 0,595%. Si realizamos la prueba de normalidad entre el rango $[-0,0119; 0,0119]$ debería comprender el 95% de las observaciones, para seguir una distribución normal.

Numero observaciones	10034
Media	-1,973E-05
Desviación estándar	0,005951
Varianza de la muestra	0,000035
Curtosis	4,369963
Coefficiente de asimetría	-0,113606
Rango	0,087432
Mínimo	-0,040477
Máximo	0,046954
Nivel de confianza(95,0%)	0,000116

Visualmente observamos que los datos fuera de este rango tienen una frecuencia superior al 5% (colas pesadas). Otro estadístico relevante es la curtosis, cuando una distribución normal le corresponde un valor de 3, en esta serie tiene una curtosis de 4,37 es decir, leptocúrtica. Observamos que la muestra está desviada hacia la izquierda, mostrando mayor frecuencia en los valores negativos.



Exponente de Hurst USDGBP



USDGBP	n	R/S	LN(N)	LN(R/S)
1	10035	155,413	9,214	5,046
2	5018	99,058	8,521	4,596
3	3345	93,799	8,115	4,541
4	2509	86,981	7,828	4,466
5	2007	72,880	7,604	4,289
10	1004	47,860	6,912	3,868
20	502	29,637	6,219	3,389
30	335	24,589	5,814	3,202
40	251	20,430	5,525	3,017
50	201	18,263	5,303	2,905
100	100	11,990	4,605	2,484
500	20	4,474	2,996	1,498

Como se muestra en la tabla se ha realizado el proceso para obtener el coeficiente de Hurst, dividiendo la muestra en 1, 2, 3,... 500 partes y obteniendo el estadístico R/S. Con estos datos obtenemos el coeficiente de Hurst que representa la pendiente de la recta del gráfico anterior.

USDGBP		
Periodo datos	Coef. Hurst	Dimensión fractal
Diarios	0,6337	1,3663
Semanales	0,7123	1,28767
Mensuales	0,6381	1,36193

Hemos calculado el exponente de Hurst seleccionando datos diarios, semanales y mensuales. Analizando los resultados vemos que independientemente del periodo de estudio, el coeficiente de Hurst siempre es superior a 0,5.

El coeficiente indica que la serie es persistente, es decir, que presenta efectos de memoria a largo plazo. Este dato junto al análisis estadístico realizado en el apartado anterior contradice la teoría del movimiento browniano aleatorio.

El coeficiente de Hurst, tal y como se ha indicado en anteriores apartados, nos permite calcular la dimensión fractal, propiedad característica de una estructura fractal. Al definirse la dimensión como $D=2-H$, el resultado es un número fraccionario cercano a 1,36.

6. CONCLUSIONES

En el capítulo anterior, hemos efectuado un análisis estadístico y fractal de la serie de retorno de distintos activos (índices, divisas y volatilidad).

En todos los estudios, hemos comprobado que las series no siguen una distribución normal, sino que en los extremos o colas, hay mayor frecuencia de datos de los que esperaríamos encontrar, en el caso de estudiar $[\bar{x} \mp 2\sigma]$, el área comprendida fuera de este intervalo es superior al 5%, que se esperaría obtener en una distribución normal. Por tanto, no es una buena aproximación ajustar estos datos con una distribución normal o Gaussiana. Por otro lado también hemos estudiado la curtosis, sabemos que si la distribución tiene una curtosis mayor que 3, función es leptocúrtica. Con nuestros datos nos han salido unas curtosis muy superiores a 3, el rango está comprendido entre curtosis de 4,36 para el caso de USDGBP, hasta curtosis de 10,45 en el caso de USDJPY. Una buena aproximación, para este tipo de series es una distribución de Pareto-Lévy (colas pesadas).

Otro de los argumentos que se basan los modelos tradicionales, es la independencia de los precios, es decir los precios no tienen memoria. Los precios son aleatorios, lo que pasó ayer no afecta en el precio de hoy, y la cotización de hoy no afectará para nada al precio de mañana. Su formación es análoga al lanzamiento de una moneda, existe la misma probabilidad que salga cara que cruz, es decir que la cotización baje o suba.

Hemos demostrado, que esto no es así calculando el coeficiente de Hurst. Si los precios tuvieran un comportamiento aleatorio, nos hubiera dado $H=0,5$. (siguiendo una Ley de Potencia). En ninguno de nuestros casos nos ha salido un coeficiente $H=0,5$.

En la series de retornos de índices y divisas, nos hemos encontrado un coeficiente de Hurst superior a 0,5, lo cual nos indica que los precios tienen memoria, y que existe mayor probabilidad de que tras un periodo alcista, siga otro periodo en el mismo sentido.

En el caso del índice de Volatilidad, hemos encontrado un H inferior a 0,5, esto lo que nos indica es que los precios tienden a volver a la media (proceso Mean Reverting).

Estos resultados demuestran que los rendimientos de índices, divisas y volatilidad, no siguen un comportamiento aleatorio puro, random walk, sino que están sesgados, es decir siguen lo que se llama **un comportamiento browniano fraccionario**.

Nuestros resultados, muestran un coeficiente H comprendido entre un rango [0,57 - 0,58] para los índices y de [0,62-0,63] para las divisas y [0,42 -0,48] para el índice de volatilidad, indicando que existen propiedades fractales en el mercado de divisa y de acciones, tales como autosimilitud y persistencia o anti-persistencia.

Por otro lado mediante el coeficiente de Hurst también podemos hallar la dimensión fractal, (propiedad intrínseca de los fractales) de estas series. Que es un número fraccionario comprendido entre 1 y 2.

Otra de las características de los fractales es la autosimilitud, que cumplen las series de retornos, ya que si en estas no indicamos el eje del tiempo, no sabemos discriminar si se trata de variaciones anuales, semanales, diarias, etc....

Por tanto podemos llegar a la conclusión que las **series de precios tienen un comportamiento fractal** y que las herramientas derivadas de la geometría fractal nos permiten realizar un análisis de mercado más realista, en cuanto a sus supuestos, y con mayor consistencia en las observaciones empíricas.

Los mercados financieros son entornos complejos, se desarrollan entre el orden y el caos, donde pequeñas variaciones iniciales producen grandes cambios en los movimientos de los precios finales. Por esta razón interesa conocer si este mercado tiene algún atractor, es decir si existen algunas pautas o fórmulas que nos permitan determinar con anticipación la inestabilidad.

En los mercados financieros emergen patrones inesperados, por esta razón, los modelos fractales se constituyen como una opción científica para quienes operan en las bolsas de valores, por su capacidad para analizar el valor de una sola variable que evoluciona a lo largo del tiempo. Prometen ayudar a descubrir un orden dentro del caos de los mercados. Por tanto creemos que el grado de capacidad de predicción de los retornos es posible de efectuar mediante la geometría fractal, pero que aún se tiene que desarrollar alguna estrategia de inversión que pueda derrotar al mercado en alguna medida.

Visualmente en los gráficos podemos identificar, a lo largo del tiempo, que hay ciertos patrones que se van repitiendo o se parecen. Nuestra tesina se ha limitado por el momento, a hacer una aproximación a este nuevo modelo. Nos hubiera gustado intentar aproximar matemáticamente un patrón, una ecuación que pudiera describir o predecir qué puede ocurrir, pero nos hemos dado cuenta que no es tan sencillo y que sería tema de una tesis doctoral.

7. REFLEXIONES

La geometría fractal es una ciencia relativamente nueva, tiene cerca de unos 30 años de historia. A lo largo de este tiempo, hemos visto que ha habido grandes avances, y se han desarrollado infinidad de aplicaciones que se basan en las propiedades fractales. Sobre todo en el área de la informática para comprimir imágenes, proceso muy utilizado en el día a día de la gente. También hemos visto que cada vez más se utilizan los métodos fractales en el campo de la medicina, o en el campo del diseño gráfico para recrear paisajes.

Los mercados financieros distan mucho de ajustarse al comportamiento postulado por la hipótesis de mercados eficientes y es por ello que los análisis de los distintos modelos basados en ella distan mucho de ser confiables. Es por ello que sus predicciones no se ajustan a la realidad y por lo que se debería intentar modificar las herramientas de nuestro análisis para ver si se puede mejorar la performance de dichos modelos.

En un futuro no muy lejano, creemos que el análisis fractal puede configurar una herramienta muy útil dentro del análisis técnico. Creemos que utilizando el coeficiente de Hurst nos puede indicar cuál es la tendencia que sigue un valor determinado, y controlando este coeficiente nos puede dar señal si hay un cambio de tendencia o continuación de tendencia.

Por el momento se han hecho estudios, y se han diseñado programas que dan órdenes de trading basados en un comportamiento fractal, aún es muy prematuro esperar ganancias significativas a través de esta teoría.

Pensamos también que en un futuro, el avance de este campo de estudio será mucho mayor, y se podrán encontrar herramientas o patrones fractales muy ajustados a los precios que expliquen determinados comportamientos de los mercados financieros e incluso sobre dichos patrones, se harán mejores modelos de trading.

8. BIBLIOGRAFIA

Peters, Edgar. "Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility". John Wiley & Sons, Inc. (1991)

Peters, Edgar. "Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics". John Wiley & Sons, Inc. (1993)

Benoît Mandelbrot y Richard L.Hudson. "Fractales y Finanzas. Una aproximación matemática a los mercados: arriesgar, perder y ganar." Editorial Tusquets (2006)

José Jesús Borjón Nieto. "Caos, Orden y Desorden: En el sistema monetario y Financiero Internacional." Plaza y Valdes Editores (2002)

Mónica Oviedo, Ana María Kanashiro, Mauro Colombini. "Fractales. Un universo poco frecuentado". Universidad Nacional del Litoral.

Miguel de Guzman, Miguel Ángel Martín, Manuel Morán y Miguel Reyes. "Estructuras fractales y sus aplicaciones". Editorial Labor (1993)

Benoît B Mandelbrot. " La geometría fractal de la naturaleza". Editorial Tusquets (1997)

Gustavo Herren. "Fractales: Las estructuras aleatorias". Editorial Longseller.

X. Brun, M. Moreno. "Análisis y selección de inversiones en mercados financieros". Editorial Profit (2008)